Résoudre $ax^2 + bx + c = d$ avec $a \neq 0$

1 Ce qu'on sait résoudre

Les équations du 1er degré : $mx + p = 0$ avec $m \neq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & mx + p = 0 && -p \quad +3 \\ \text{ssi} \quad & mx = -p && \div m \\ \text{ssi} \quad & x = \frac{-p}{m} && \end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : quel que soit le réel x, $mx+p=0$ si et seulement si $x = \frac{-p}{m}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad mx+p=0 \Leftrightarrow x = \frac{-p}{m}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad mx+p=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-p}{m}\right\}$$

L'ensemble solution de l'équation $mx+p=0$ est $S = \left\{\frac{-p}{m}\right\}$

Les équations "produit-nul" :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Les équations avec valeur absolue :

$$|X| = k \text{ avec } k \geqslant 0 \quad \text{ssi} \quad X = -k \text{ ou } X = k$$

Exemple : résoudre $|-2x+3| = \frac{5}{4}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$|-2x+3| = \frac{5}{4}$ ssi $-2x+3 = \frac{5}{4}$ ou $-2x+3 = -\frac{5}{4}$ $\quad -3$

ssi $-2x = -\frac{7}{4}$ ou $-2x = -\frac{17}{4}$ $\quad \div(2)$ ou $\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

ssi $x = \frac{7}{8}$ ou $x = \frac{17}{8}$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{8} ; \frac{17}{8}\right\}$

Les équations du type $X^2 = k$ avec $k \geqslant 0$.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$

Par définition $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

09/09

Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$

On va se servir de deux résultats : $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = |a|^2$

$\forall b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{b^2} = b$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\underbrace{\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2}}_{\text{résultat 1}}$ et $\underbrace{\sqrt{|x|^2} = |x|}_{\text{résultat 2}}$

ce qui entraine par transitivité ($A = B$ et $B = C$ donne $A = C$)

que $\sqrt{x^2} = |x|$

On se sert de ce résultat pour résoudre l'équation $X^2 = k$.

Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, X^2 = k$ avec $k \geqslant 0$ ssi $X = -\sqrt{k}$ ou $X = +\sqrt{k}$

On pose k un réel ~~positif~~. Soit $X \in \mathbb{R}$

$$X^2 = k$$
ssi $\sqrt{X^2} = \sqrt{k}$
ssi $|X| = \sqrt{k}$
ssi $X = -\sqrt{k}$ ou $X = \sqrt{k}$

on prend racine carrée
$\sqrt{X^2} = |X|$
du type $|X| = K$ ssi $X = -K$ ou $X = K$

On peut également démontrer ce résultat en utilisant les identités remarquables

$X^2 - k^2 = (X-k)(X+k)$

$X^2 + 2pX + p^2 = (X+p)^2 \iff X^2 + 2pX = (X+p)^2 - p^2$

$X^2 - 2pX + p^2 = (X-p)^2 \iff X^2 - 2pX = (X-p)^2 - p^2$

complétion du carré

On pose $k \in \mathbb{R}_+$. Soit $X \in \mathbb{R}$

$$X^2 = k$$
ssi $X^2 - k = 0$
ssi $X^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$
ssi $(X - \sqrt{k})(X + \sqrt{k}) = 0$
ssi $X - \sqrt{k} = 0$ ou $X + \sqrt{k} = 0$
ssi $X = \sqrt{k}$ ou $X = -\sqrt{k}$

$-k$
$k = (\sqrt{k})^2$ car $k \geqslant 0$
$u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$
$A \times B = 0$ ssi $A = 0$ ou $B = 0$
$+\sqrt{k}$ | $-\sqrt{k}$

Exercice : résoudre dans $\mathbb{R}$, $(-2x+5)^2 = 7$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(-2x+5)^2 = 7$ ssi $-2x+5 = -\sqrt{7}$ ou $-2x+5 = \sqrt{7}$

ssi $-2x = -5 - \sqrt{7}$ ou $-2x = -5 + \sqrt{7}$

ssi $x = \dfrac{-5-\sqrt{7}}{-2}$ ou $x = \dfrac{-5+\sqrt{7}}{-2}$

Avec le calcul complet cela donne :

$(-2x+5)^2 = 7$

ssi $(-2x+5)^2 - 7 = 0$

ssi $(-2x+5)^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$

ssi $(-2x+5-\sqrt{7})(-2x+5+\sqrt{7}) = 0$

ssi $-2x+5-\sqrt{7} = 0$ ou $-2x+5+\sqrt{7} = 0$

ssi $x = \dfrac{-5+\sqrt{7}}{-2}$ ou $x = \dfrac{-5-\sqrt{7}}{-2}$

- -7
- $7 = (\sqrt{7})^2$
- $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$
- du type $A \times B = 0$
- $-5+\sqrt{7}$ puis $\div(-2)$ | $-5-\sqrt{7}$ puis $\div(-2)$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-2x+5)^2 = 7$ ssi $x = \dfrac{-5+\sqrt{7}}{-2}$ ou $x = \dfrac{-5-\sqrt{7}}{-2}$

L'ensemble solution de l'équation $(2x+5)^2 = 7$ est

$$S = \left\{ \frac{-5+\sqrt{7}}{-2} , \frac{-5-\sqrt{7}}{-2} \right\}$$

2 Etude au cas par cas de $ax^2 + bx + c = d$.

$a = 1$, $b = c = 0$ $\quad x^2 = d$ du type $X^2 = k$

$b = c = 0$ $\quad ax^2 = d \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{d}{a}$ du type $X^2 = k$

$a = 1$, $b = 0$ $\quad x^2 + c = d \Leftrightarrow x^2 = d - c$ du type $X^2 = k$

$b = 0$ $\quad ax^2 + c = d \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{d-c}{a}$ du type $X^2 = k$

$c = d = 0$ $\quad ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0$ du type $A \times B = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $ax + b = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{-b}{a}$

$a = 1,\ c = 0$ $\qquad x^2 + bx = d$

	$x^2 + bx = d$	$-d$ on peut éviter cette étape
ssi	$x^2 + bx - d = 0$	$x^2 + 2px = (x+p)^2 - p^2$ avec $2p = b$ ssi $p = \frac{b}{2}$
ssi	$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - d = 0$	$+ \left(\frac{b}{2}\right)^2 + d$
ssi	$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + d$	du type $X^2 = k$

Exemple : résoudre $x^2 + 5x = +10$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

	$x^2 + 5x = 10$	$x^2 + 2px = (x+p)^2 - p^2$ avec $2p = 5$ ssi $p = \frac{5}{2}$
ssi	$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 10$	$+ \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
ssi	$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + 10$	$\frac{25}{4} + 10 = \frac{65}{4}$
ssi	$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$	du type $X^2 = k > 0$ ssi $X = \pm\sqrt{k}$
ssi	$x + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{65}{4}}$ ou $x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{65}{4}}$	$-\frac{5}{2}$
ssi	$x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{65}{4}}$ ou $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{65}{4}}$	$\sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$
ssi	$x = \frac{-5 - \sqrt{65}}{2}$ ou $x = \frac{-5 + \sqrt{65}}{2}$	

$a = 1,\ d = 0$ $\qquad x^2 + bx + c = 0$

	$x^2 + bx + c = 0$	$-c$
ssi	$x^2 + bx = -c$	$x^2 + 2px = (x+p)^2 - p^2$ avec $2p = b$ ssi $p = \frac{b}{2}$
ssi	$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c$	$+ \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

ssi $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$ | du type $X^2 = k$

$\boxed{d=0}$ $\quad ax^2 + bx + c = 0$

Finalement, les cas $c=0$ et $d=0$ reviennent au même.

$c=0$: $\quad ax^2+bx = d \quad$ ssi $\quad ax^2+bx-d=0$

$d=0$: $\quad ax^2+bx+c=0$

$$
\begin{array}{ll|l}
 & ax^2+bx+c=0 & -c \\
\Leftrightarrow & ax^2+bx = -c & \div a \\
\Leftrightarrow & \dfrac{ax^2+bx}{a} = \dfrac{-c}{a} & \dfrac{A+B}{C} = \dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} \\
\Leftrightarrow & x^2 + \dfrac{b}{a}x = \dfrac{-c}{a} & x^2+2px = (x+p)^2 - p^2 \text{ avec } 2p = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow p = \dfrac{b}{2a} \\
\Leftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{-c}{a} & +\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} \\
\Leftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a} & \dfrac{c}{a} = \dfrac{4ac}{4a^2} \\
\Leftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} & \text{du type } X^2 = k
\end{array}
$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ ① $-2x^2+3x-4=-3$

② $3x^2+7x+5=3$

① Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{array}{ll|l}
 & -2x^2+3x-4=-3 & +4 \\
\Leftrightarrow & -2x^2+3x = 1 & \div(-2) \\
\Leftrightarrow & x^2 - \dfrac{3}{2}x = -\dfrac{1}{2} & x^2-2px = (x-p)^2-p^2 \text{ avec } 2p=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow p = \dfrac{3}{4} \\
\Leftrightarrow & \left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = -\dfrac{1}{2} & +\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{2}$	$\frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$	du type $X^2 = k$ avec $X = x - \frac{3}{4}$ et $k = \frac{1}{16}$
$\Leftrightarrow x - \frac{3}{4} = -\sqrt{\frac{1}{16}}$ ou $x - \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{1}{16}}$	$+\frac{3}{4}$ et $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$	

L'ensemble solution de l'équation est $\left\{ \frac{1}{2} ; 1 \right\}$.

② $3x^2 + 7x + 5 = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$3x^2 + 7x + 5 = 3$	-5
$\Leftrightarrow 3x^2 + 7x = -2$	$\div (3)$
$\Leftrightarrow x^2 + \frac{7}{3} x = \frac{-2}{3}$	$x^2 - 2px = (x-p)^2 - p^2$ avec $2p = \frac{7}{3} \Leftrightarrow p = \frac{7}{6}$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3}$	$+\left(\frac{7}{6}\right)^2$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}$	$\left(\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{49}{36} - \frac{24}{36} = \frac{25}{36}$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$	du type $X^2 = k$ avec $X = x + \frac{7}{6}$ et $k = \frac{25}{36}$
$\Leftrightarrow x + \frac{7}{6} = -\frac{5}{6}$ ou $x + \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$	$-\frac{7}{6}$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -\frac{1}{3}$	

L'ensemble solution de l'équation est $\left\{ -2 ; -\frac{1}{3} \right\}$.

Exercice Résoudre dans $\mathbb{R}$.

① $2x^2+5x-3=0$ ③ $-6x^2-x+1=0$

② $-3x^2+4x-1=0$ ④ $12x^2-x-6=0$

① $\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x=3$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{5}{4}=-\frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad x+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

$$2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x=-3 \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{2}$$

② $\forall x \in \mathbb{R}$, $-3x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x=1.$$

③ $\forall x \in \mathbb{R}$, $-6x^2-x+1=0 \Leftrightarrow -6x^2-x=-1$

$$\Leftrightarrow 6x^2+x=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{6}x=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{12}\right)^2=\left(\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{12} = -\frac{5}{12} \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}$$

4 $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 12x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - x = 6$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{12}x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{24}\right)^2 - \left(\frac{1}{24}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{24}\right)^2 = \left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{24}\right)^2 = \frac{289}{24^2} = \left(\frac{17}{24}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{24} = -\frac{17}{24} \quad \text{ou} \quad x - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{4}$$