Chapitre 1 : fonction polynôme du second degré sous toutes ses formes

1 Généralités et définition

Une fonction *monôme* est une fonction de la forme $x \mapsto ax^n$ où a est un réel et n un entier naturel. Cette fonction monôme est de degré n si $a \neq 0$ (sinon on obtiendrait la fonction nulle, qui est de degré indéfini car pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $0 \times x^n = 0$).

Exemple : la fonction $x \mapsto -5x^4$ est une fonction monôme de degré 4.

Une fonction qui peut s'écrire comme une *somme* de plusieurs fonctions monômes est une fonction *polynôme*. C'est une fonction qui admet une écriture dite « polynomiale », de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0 représente une suite de réels, et n est un entier naturel. Cette fonction polynôme est de degré n si $a_n \neq 0$. Ainsi, $x \mapsto 2x^7 + 3^3 - 4x$ est une fonction polynôme de degré 7.

Remarque : on parle aussi de fonction *polynomiale*.

Dans le cadre de cette leçon, on s'intéresse uniquement au fonctions polynômes de degré 2 ($n = 2$).

Définition 1

Toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ est une fonction polynôme du second degré, *ou plus simplement* trinôme du second degré.

Les réels a, b et c sont les coefficients du trinôme $ax^2 + bx + c$. Ce trinôme résultant de l'enchaînement de deux additions, les monômes ax^2, bx et c sont donc les termes d'une somme. Le réel a est le coefficient du terme de degré 2, b celui du terme de degré 1 et c celui du terme de degré 0.

Exemples : les fonctions suivantes sont toutes des trinômes du second degré :

- $x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$ $\quad (a = -2\,,\ b = 3\,,\ c = -1)$
- $x \mapsto 3x^2$ $\quad (a = 3\,,\ b = 0\,,\ c = 0)$
- $x \mapsto (x-1)(x+2)$ car pour tout réel x, $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ $\quad (a = 1\,,\ b = 1\,,\ c = -2)$

Par contre la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-9}{x+3}$ n'est pas un trinôme du second degré car le coefficient du terme de degré 2 est nul.

En effet pour tout réel x, $\dfrac{x^2-9}{x+3} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x - 3$ $\quad (a = 0\,,\ b = 1\,,\ c = -3)$

Attention : le coefficient a N'EST PAS un coefficient directeur ! Nous ne sommes pas en présence de fonctions affines !

Exercice 1

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes de degré 2. Si oui, indiquer les valeurs de leurs coefficients.

(1) $x \mapsto \dfrac{x^4 - 5x^3 + 6x^2}{x^2}$ *(2)* $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+1}$ *(3)* $x \mapsto \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^2 + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^2$

Ainsi, des expressions aux formes très diverses peuvent s'avérer être des trinômes du second degré. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux formes : la forme canonique et la forme factorisée.

2 Forme canonique d'un trinôme de degré 2

Activité 2

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = 2(x-3)^2 - 7$ et $g(x) = 2x^2 - 12x + 11$.

1. *Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Que recherche-t-on avec cette résolution d'équation ?*
2. *Montrer que $f(x) = g(x)$. Que peut-on alors dire de la « nature » de f ?*
3. *Résoudre l'équation $g(x) = 0$.*
4. *Tracer successivement à l'aide de la calculatrice les représentations graphiques des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$, $x \mapsto (x-3)^2$, $x \mapsto 2(x-3)^2$, $x \mapsto 2(x-3)^2 - 7$. Commentez.*
5. *En quoi la forme $2(x-3)^2 - 7$ est-elle intéressante ? Une généralisation aux fonctions polynôme de degré 2 vous semble-t-elle possible ?*

Cette forme particulière que peut prendre une fonction polynôme de degré 2 et qui vient d'être présentée dans cette activité s'appelle une *forme canonique*. Elle est intéressante car elle nous ramène à une forme d'équation connue $X^2 = k$.

Pour la présenter, il est d'usage de l'écrire sous la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$ où α (alpha) et β (bêta) sont des réels. En effet, puisque a est un réel non nul, $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$ donne $(x-\alpha)^2 = {}^{-\beta}/_{a}$ qui est bien de la forme $X^2 = k$. On verra également que cette forme présente un intérêt au niveau des représentations graphiques.

Voyons comment la déterminer en toute généralité à partir de la forme développée d'un trinôme du second degré.

Soient $x, a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On a :

$$ax^2 + bx + c$$

on factorise les termes variables par a

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

*on utilise la méthode de **complétion du carré**.*
$\forall x, p \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 2px + p^2 = (x+p)^2 \iff x^2 + 2px = (x+p)^2 - p^2$$

ici $2p = \dfrac{b}{a} \iff p = \dfrac{b}{2a}$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

on distribue a

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

on réduit le terme constant sous le même dénominateur

$$= \boxed{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

on reconnaît une forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$

$$= \boxed{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$$

cette écriture est aussi une forme canonique

Ainsi, par exemple, dans le cadre de la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \iff \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0}_{\text{de la forme } X^2 - k = 0} \iff \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}_{\text{de la forme } X^2 = k}$$

On voit qu'on est capable de se ramener à une forme du type $X^2 - k = 0 \iff X^2 = k$ que l'on sait résoudre.

Définition 2 : forme canonique

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Toute fonction polynôme f de degré 2 et de forme développée $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire :

- *sous la forme* $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$ *où* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *et* $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$
- *sous la forme* $f(x) = a\left[\,(x-\alpha)^2 - \lambda\,\right]$ *où* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *et* $\lambda = \dfrac{-\beta}{a} = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

Remarque : il existe deux définitions de la forme canonique d'une fonction trinôme de degré 2 (on trouve les deux dans la littérature). En fait, elles ne sont pas différentes dans la mesure où $\beta = -a\lambda$. Par contre, il est nécessaire de connaître $\alpha = \frac{-b}{2a}$, alors qu'il est suffisant de juste savoir que $\beta = f(\alpha)$.

Ces deux formes ont chacune un intérêt, c'est pourquoi elles sont toutes les deux proposées dans ce cours :

- la forme $a\,(x-\alpha)^2 + \beta$ trouve son intérêt dans le cadre d'une étude graphique,
- la forme $a\left[\,(x-\alpha)^2 - \lambda\,\right]$ est intéressante dans le cadre de la résolution de l'équation $f(x) = 0$, car le facteur a se supprime. Attention toutefois, dans le cas des inéquations, le signe de a a son importance.

Nous étudierons les variations d'un trinôme du second degré f et les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans un autre chapitre. Nous allons pour le moment nous intéresser à une autre forme que peut éventuellement admettre une fonction polynôme de degré 2 : la forme factorisée.

3 Forme factorisée d'un trinôme du second degré

3.1 Racine d'un trinôme du second degré

Soit par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x+2)$. On se rend facilement compte que 1 et -2 sont solutions de l'équation $f(x) = 0$, et que par ailleurs, f est un trinôme du second degré puisqu'en développant l'expression on obtient $f(x) = x^2 + x - 2$. On voit bien ici le net avantage d'une forme factorisée sur la forme développée pour rechercher les *éventuels* antécédents de 0 par f, qui correspondent aux *éventuelles* solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ces solutions, lorsqu'elles existent, sont appelées *racines* de f.

Définition 3 : racine d'un trinôme de degré 2 ❤❤❤

Soit f un trinôme de degré 2. Tout nombre réel r tel que $f(r) = 0$ est appelé racine de f. Une racine de f est donc une solution de l'équation $f(x) = 0$, ou autrement dit, un antécédent de 0 par f.

Remarque : Cette définition se généralise à toute fonction polynôme.

Exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ est telle que $f(1) = f(-3) = 0$. Le trinôme f admet donc 1 et -3 pour racines.

Activité 3

Un élève prétend qu'un trinôme du second degré admet toujours une racine. Qu'en pensez-vous ?

3.2 Factorisation d'un trinôme du second degré

Soit f un trinôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Si un réel r_1 est une racine de f, alors $f(r_1) = 0$. Calculons $f(x) - f(r_1)$:

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(r_1) &= ax^2+bx+c-(ar_1^2+br_1+c) && \textit{il n'est pas pertinent d'écrire } f(r_1)=0\\
&= a(x^2-r_1^2)+b(x-r_1) && \textit{on reconnaît l'identité remarquable } x^2-r_1^2=(x-r_1)(x+r_1)\\
&= a(x-r_1)(x+r_1)+b(x-r_1) && \textit{on factorise par } (x-r_1)\\
&= (x-r_1)\Big[\,a(x+r_1)+b\Big] && \textit{on reconnaît l'identité remarquable } x^2-r_1^2=(x-r_1)(x+r_1)\\
&= (x-r_1)(ax+ar_1+b) && \textit{on pose } ar_1+b=d \textit{ (mais ce n'est pas à retenir)}\\
&= (x-r_1)(ax+d) && \textit{à présent il est pertinent de se souvenir que } f(r_1)=0\\
&\boxed{f(x)=(x-r_1)(ax+d) \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}} && ax+d \textit{ est l'expression d'une fonction affine puisque } a\neq 0.
\end{aligned}
$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 4

Si un trinôme du second degré f admet le nombre réel r_1 comme racine, alors f est factorisable par $(x-r_1)$. Par ailleurs, le second facteur est nécessairement un polynôme du 1[er] degré, et donc le trinôme admet une seconde racine notée r_2 qui peut être *distincte de la première.*

Exercice 4

1. *Pourquoi a-t-on dit « qui peut être » dans cette proposition ?*
2. *À quelle condition a-t-on $r_1=r_2$?*

Pour des raisons qui paraîtront évidentes par la suite, on préfère une forme encore plus aboutie que $f(x)=(x-r_1)(ax+d)$, et qui met en évidence cette seconde racine.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-r_1)(ax+d) && \textit{on factorise par } a : ax+d=a\left(x+\frac{d}{a}\right) \textit{ ce qui est valide puisque par hypothèse } a\neq 0\\
&= (x-r_1)\times a\left(x+\frac{d}{a}\right) && \textit{on pose } \frac{d}{a}=-r_2 \textit{ avec } d=ar_1+b\\
&\boxed{f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)} && r_2=-\frac{ar_1+b}{a}=-r_1-\frac{b}{a} \textit{ (mais ce n'est pas à retenir)}
\end{aligned}
$$

Cette forme factorisée met en évidence les deux racines r_1 et r_2 : on voit bien que $f(r_1)=f(r_2)=0$.

Exercice 5 : pour s'entraîner au calcul

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$. On suppose que r_1 est une racine de f et on pose $r_2=-r_1-\dfrac{b}{a}$. Montrer que $f(r_2)=0$.

Bilan : trois cas de figure peuvent se présenter avec un trinôme du second degré :

- il peut ne pas admettre de racine réelle (activité 3.1 page 3),
- il peut admettre une et une seule racine réelle (exercice 3.2 page 4),
- il peut admettre deux racines réelles,

Proposition 5 ❤❤❤

Soit f un trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

*f admet **au plus** deux racines (c'est à dire 0, 1, ou au plus 2 racines) :*

1. *Si f n'admet pas de racine réelle, alors f n'admet pas de forme factorisée.*
2. *Si f n'admet qu'une racine réelle noté r_0, alors f admet une forme factorisée* $\boxed{f(x) = a(x - r_0)^2}$.

   Cette racine est appelée « racine double ».
3. *Si f admet deux racines réelles notées r_1 et r_2, alors f admet une forme factorisée* $\boxed{f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$.

   Ces racines sont appelées « racines simples ».

Remarques :

- ce n'est pas parce qu'un trinôme n'admet pas de forme factorisée, qu'il n'admettrait pas de forme canonique. Il ne faut pas confondre ces deux formes : un trinôme du second degré admet **toujours** une forme canonique.
- r_0 est appelée **racine double** car tout se passe comme si on avait alors deux fois la même racine :

$$f(x) = a(x - r_0)^2 = a(x - r_0)(x - r_0)$$

3.3 Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré

Activité 6

Soit f un trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On suppose que f admet deux racines r_1 et r_2.

Développer et réduire la forme factorisée de f, puis comparer les termes avec la forme développée $ax^2 + bx + c$ pour déterminer les expressions de $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$.

Proposition 6

Soit f un trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Si f admet les réels r_1 et r_2 pour racines, alors : $\boxed{r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}}$ *et* $\boxed{r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}}$.

Ainsi, la connaissance d'une racine permet de déterminer l'autre par l'utilisation de l'une de ces deux relations. Dans la pratique, il y a plus facile à utiliser, en se souvenant de la relation $f(x) = (x - r_1)(ax + d)$ établie page 4. Si on développe cette expression, cela donne :

$$f(x) = \big(x - r_1\big)\big(ax + d\big) = ax^2 + \underbrace{(d - r_1 a)x}_{bx} + \underbrace{(-r_1 d)}_{c}$$

On peut tout d'abord remarquer qu'il est évident de retrouver le coefficient a dans le second facteur , car c'est le seul moyen de retrouver le terme ax^2 après développement. Ensuite, pour trouver d, il suffit de s'appuyer sur le produit $-r_1 d$ qui est nécessairement égal au coefficient c.

Exemple : soit le trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

On remarque assez facilement que 1 est une racine évidente de f. En effet : $f(1) = 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 0$. On sait donc que f prend la forme $f(x) = (x - 1)(2x + d)$ avec d qui est un réel à déterminer.

Un développement donne $f(x) = (x - 1)(2x + d) = 2x^2 + \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{aucun intérêt à calculer}} - d = 2x^2 - 5x + 3$

On a nécessairement $-d = 3 \iff d = -3$ et l'expression factorisée de f est donc $f(x) = (x-1)(2x-3)$ et la seconde racine est $r_2 = \dfrac{3}{2}$.

Exemple soit le trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

Le nombre 2 est une racine évidente de f. On sait donc que f prend la forme $f(x) = (x-2)(-2x+d)$ avec d qui est un réel à déterminer.

$$f(x) = (x-2)(-2x+d) = 2x^2 + \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\substack{\text{aucun}\\ \text{intérêt à}\\ \text{calculer}}} - 2d = -2x^2 + 5x - 2$$

On a nécessairement $-2d = -2 \iff d = 1$ et l'expression factorisée de f est donc $f(x) = (x-2)(1-2x)$ et la seconde racine est $r_2 = \dfrac{1}{2}$.