$ax^2+bx+c=0$ donne $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$

c'est une des formes canoniques $a(x-\alpha)^2+\beta=0$

Pour résoudre cette équation on peut factoriser par $a$, pour aboutir à :

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$ et comme $a\neq 0$ on obtient

$$\boxed{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0}$$

qui est de la forme $X^2-K=0$ en posant $X=x+\frac{b}{2a}$

et $K=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

La résolution de cette équation dépend du signe de $K$, et comme $4a^2>0$, cela dépend donc du signe de $b^2-4ac$.

On pose $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ et on appelle ce paramètre le discriminant.

Ainsi l'équation devient $(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution.

si $\Delta\geqslant 0$ alors l'équation admet au moins une solution.

# Le second degré (fin).

<u>NB</u> : attention $\sqrt{a^2} = |a|$

**Exercice 1**

*Résoudre les équations suivantes à l'aide du discriminant :*

(a) $x^2 + 14x + 40 = 0$ (b) $-10z^2 + 19z + 2 = 0$ (c) $t^2 + 2t - 10 = 0$ (d) $x^2 - 4x - 45 = 0$ (e) $15t^2 + 22t - 9 = 0$
(f) $x^2 + 5x - 9 = 0$

$\boxed{a}$ $x^2+14x+40$ est un trinôme du second degré de discriminant

$\Delta = (14)^2 - 4(1)(40) = 196 - 160 = 36 > 0$, donc ce trinôme admet

deux racines $x_1$ et $x_2$ avec :

$$x_1 = \frac{-(14)-\sqrt{36}}{2(1)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(14)+\sqrt{36}}{2(1)}$$

soit $x_1 = -10$ et $x_2 = -4$.

<u>NB</u> : $14^2 = 14 \times (10+4) = 14 \times 10 + 14 \times 4 = 140 + 56 = 196$

$\boxed{b}$ On reconnait une équation du second degré de discriminant

$\Delta = (19)^2 - 4(-10)(2) = 361 + 80 = 441 > 0$, et donc cette équation

admet deux solutions $x_1$ et $x_2$ avec :

$$x_1 = \frac{-(19)-\sqrt{441}}{2(-10)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(19)+\sqrt{441}}{2(-10)}$$

soit $x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{1}{10}$

$\boxed{c}$ $t \mapsto t^2 + 2t - 10 = 0$ est une fonction polynomiale du second degré de

discriminant $\Delta = (2)^2 - 4(1)(-10) = 44 > 0$, et donc cette fonction admet deux

racines $t_1$ et $t_2$ avec :

$$t_1 = \frac{-(2)-\sqrt{44}}{2(1)} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-(2)+\sqrt{44}}{2(1)} \quad \text{avec } \sqrt{44} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$$

soit $t_1 = -1-\sqrt{11}$ et $t_2 = -1+\sqrt{11}$

$\boxed{d}$ $x^2 - 4x - 45 = 0$ est une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-45) = 16 + 180 = 196 > 0$, et donc elle admet deux solutions $x_1$ et $x_2$ avec :

$$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{196}}{2(1)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{196}}{2(1)}$$

soit $x_1 = -5$ et $x_2 = 9$

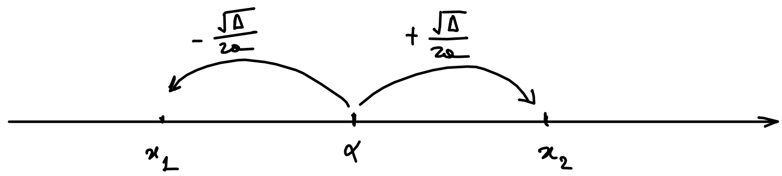
Par ailleurs, on a donc $x^2 - 4x - 45 = (x+5)(x-9)$

NB : $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ quand il y a deux racines.

NB :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$




et donc $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ c'est une moyenne.

$\boxed{e}$ $15t^2 + 22t - 9 = 0$

$\Delta = 1024 > 0$

$t_1 = -\dfrac{9}{5}$ et $t_2 = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{f}$ $x^2 + 5x - 9 = 0$

$\Delta = 61 > 0$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{61}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{61}}{2}$$

Pour les exercices **1** et **2**, déterminer le sommet et l'axe de symétrie des paraboles représentant les fonctions $f$, $g$ et $h$.

**1** **1.** $f(x)=3(x-1)^2+5$
**2.** $g(x)=4x^2+4x+1$
**3.** $h(x)=x^2-8x+1$

**2** **1.** $f(x)=x^2+3x-2$
**2.** $g(x)=3x^2-6x+1$
**3.** $h(x)=(-x+1)(2x+3)$

$\boxed{1}$ $f(x) = 3(x-1)^2+5$ forme canonique : $a(x-\alpha)^2+\beta$

$\alpha = 1$ et $\beta = 5$

Le sommet S a pour coordonnées $(1 ; 5)$.

L'axe de symétrie de cette parabole est $x = 1$

NB : avec $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ $S(\alpha, \beta)$

Axe de symétrie : $x = \alpha$

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

$\boxed{2}$ $g(x)=4x^2+4x+1$

$g$ est un trinôme du second degré de la forme $g(x) = ax^2+bx+c$ avec $a = 4$, $b = 4$ et $c = 1$.

Le sommet S de la parabole a alors pour coordonnées $(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = g(\alpha)$.

Ainsi $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = g(\alpha) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et le couple de coordonnées de S est $\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$.

L'axe de symétrie de la parabole associée à $g$ a pour équation $x = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{3}$ $h(x) = (-x+1)(2x+3)$

L'abscisse $\alpha$ du sommet S de la parabole associé à $h$ est égal à la moyenne des racines de $h$.

Or ces racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$ donc $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

L'ordonnée $\beta$ du sommet S est $\beta = h(\alpha) = \frac{25}{8}$

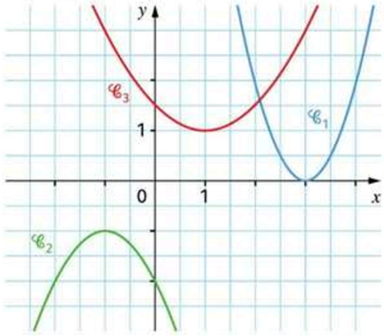
L'axe de symétrie de cette parabole a donc pour équation $x = -\frac{1}{4}$.

**31** Les fonctions $f$, $g$ et $h$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -(x+1)^2 - 1 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$$

$$h(x) = 2(x-3)^2$$

On donne ci-dessous leurs courbes représentatives.
Associer, en justifiant, chaque fonction à sa courbe.

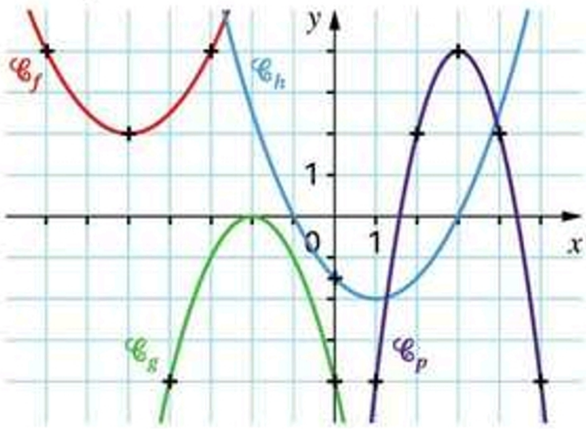



Rassemblons les résultats dans un tableau.

On note S le sommet de la parabole et $y_S$ son ordonnée.

| fonction | $y_S$ | courbe associée |
|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | $\mathscr{C}_2$ |
| $g$ | $+1$ | $\mathscr{C}_3$ |
| $h$ | $0$ | $\mathscr{C}_1$ |

**77** Déterminer la forme canonique puis développée de chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $p$ associées aux paraboles représentées ci-dessous.




Toutes les courbes sont des paraboles donc les fonctions sont des trinômes du second degré.

On note $S(\alpha, \beta)$ le sommet d'une parabole.

- <u>Détermination de $f$ :</u>

On a $S(-5;2)$ donc $f$ est de la forme $f(x) = a(x+5)^2 + 2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Or d'après le graphique, $f(-3)=4$ donc $a(-3+5)^2+2=4$ ce qui donne $a=\frac{1}{2}$.

Ainsi $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}(x+5)^2+2=\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{29}{2}}$

- <u>Détermination de $g$</u> :

  On a $S(-2;0)$ et donc $g(x)=a(x+2)^2$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

  De plus $g(0)=-4$ et donc $a(0+2)^2=-4$ d'où $a=-1$.

  Ainsi $g(x)=-(x+2)^2=-x^2-4x-4$.

- <u>Détermination de $h$</u> :

  Notons $x_1$ et $x_2$ les racines de $h$. On lit graphiquement que $x_1=-1$ et $x_2=3$. Ainsi $h(x)=a(x+1)(x-3)$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

  De plus $h(1)=-2$ donc $a(1+1)(1-3)=-4a=-2$ d'où $a=\frac{1}{2}$.

  Conclusion : $h(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

**77** Déterminer la forme canonique puis développée de chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $p$ associées aux paraboles représentées ci-dessous.