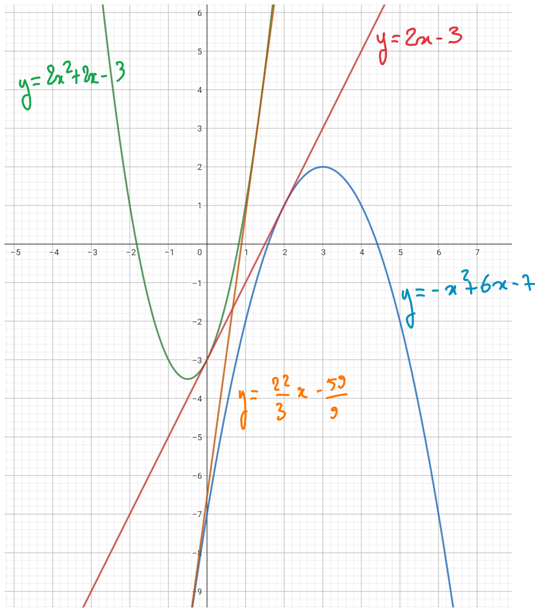
91 PRISE D'INITIATIVES **Paraboles cherchent tangentes**

Montrer que les paraboles $\mathscr{P}_1 : y = 2x^2 + 2x - 3$ et $\mathscr{P}_2 : y = -x^2 + 6x - 7$ admettent deux tangentes communes bien qu'elles n'admettent aucun point commun. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces tangentes.

On pose $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 7$.

Pour montrer que les parabole ne s'intercepte pas, montrer que $f(x) - g(x) = 0$ n'a pas de solution.



Equation d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ en a

$$(T_{1,a}) : y = (4a+2)(x-a) + 2a^2 + 2a - 3$$

$$y = (4a+2)x - 2a^2 - 3$$

Equation d'une tangente à $\mathcal{C}_g$ en b

$$(T_{2,b}) : y = (-2b+6)(x-b) - b^2 + 6b - 7$$

$$y = (-2b+6)x + b^2 - 7$$

Tangentes communes pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(4a+2)x - 2a^2 - 3 = (-2b+6)x + b^2 - 7 \iff (4a + 2b - 4)x - 2a^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ \text{et} \\ 2a^2 + b^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 - 2a \\ 2a^2 + (2-2a)^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 - 2a \\ 6a^2 - 8a = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 2 - 2a \\ a(3a - 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 - 2a \\ a = 0 \text{ ou } a = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Les deux tangentes ont pour équations :

$$(T_1) : y = 2x - 3 \quad \text{et} \quad (T_2) : y = \frac{22}{3}x - \frac{59}{9}$$

Ce qu'il faut comprendre : $\forall x \in \mathbb{R}$, $mx + p = 0 \iff m = 0$ et $p = 0$

Pour que $mx+p$ soit nul quel que soit la valeur de x, il faut et il suffit que $m = 0$ et $p = 0$.

92 Exercice guidé
On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ et la fonction inverse $g : x \mapsto \frac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.
Existe-t-il des droites tangentes à la fois à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$?

$f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

(T_1) : $y = 2a(x-a) + a^2$

$y = 2ax - a^2$

(T_2) : $y = -\frac{1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b}$

$y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

Système à résoudre

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 = \frac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2b^2} \\ -\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2b^2} \\ b^3 = -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'unique tangente a pour équation $y = -4x - 4$