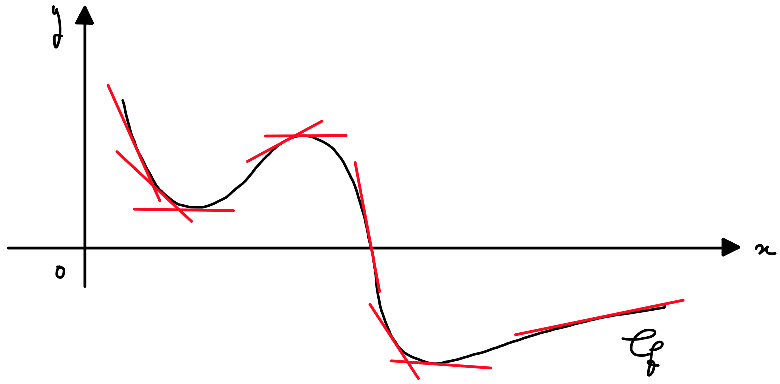
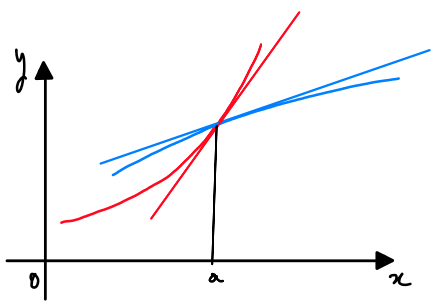
L'ESSENTIEL SUR LES NOMBRES DÉRIVÉS



Les tangentes à une courbe « suivent » les variations de cette courbe et donc les variations de la fonction associée : l'inclinaison / la pente d'une tangente renseigne sur le sens de variation de la fonction au voisinage d'un point.

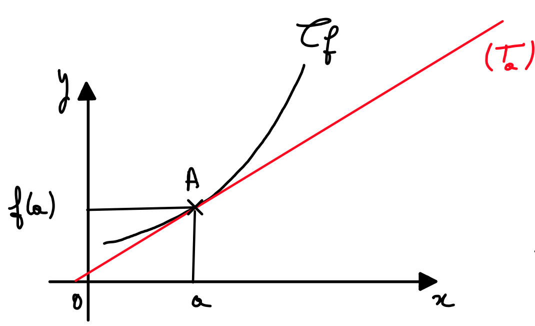
pente positive / fonction croissante

pente négative / fonction décroissante



Plus l'évolution est rapide, plus l'inclinaison / la pente de la tangente est importante.

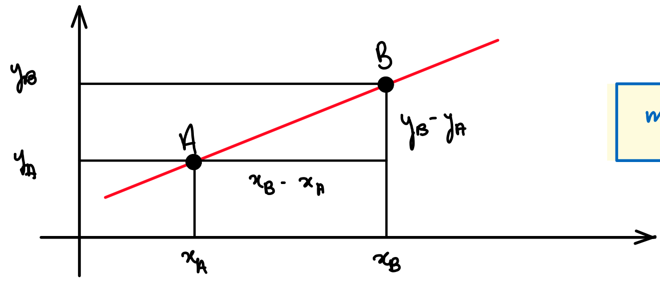
Pour rendre numériquement de ces observations, on utilise le coefficient directeur associé à une tangente.



A qui a pour abscisse $x_A = a$ est sur $\mathcal{C}_f$ donc $y_A = f(a)$

$A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f$.

La difficulté provient du fait qu'on ne peut pas calculer le coefficient directeur d'une droite en ne se basant que sur un seul point : il nous en faut deux.

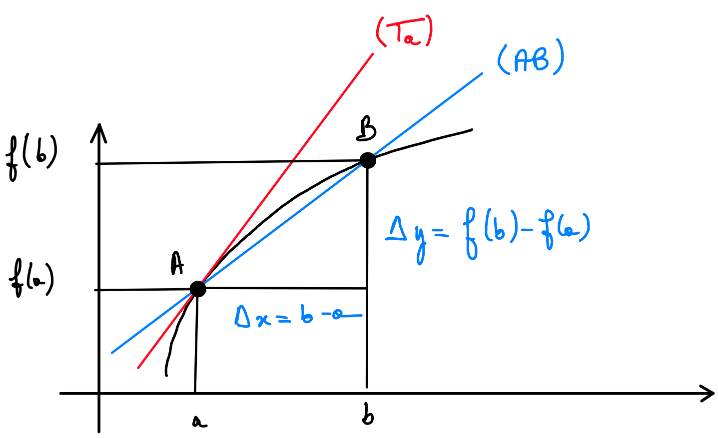


$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Le coefficient directeur d'une droite représente le « déplacement » qu'il faut effectuer à « l'horizontale » ($\Delta x = x_B - x_A$) puis à la « verticale » ($\Delta y = y_B - y_A$) pour passer de A à B.

Ces déplacements sont relatifs, c'est à dire que le déplacement Δy dépend du déplacement Δx. Le coefficient directeur m est une variation relative, ou encore appelé taux de variation.

Comment calculer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe.



↪ le coefficient directeur de la droite (AB) est $m_{(AB)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

↪ Si on glisse B vers A le long de la courbe (on note $B \longrightarrow A$) alors la droite (AB) se rapproche de la tangente (T_a) jusqu'à pratiquement s'y confondre. Quand B est au voisinage de A (c'est à dire infiniment proche de A : on dit qu'on est à la "limite"), le coefficient directeur de la droite (AB) tend à être égal coefficient directeur de la tangente (T_a).

$$\boxed{m_{(T_a)} = \lim_{B \to A} m_{(AB)} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Pour des raisons pratique, au niveau calculatoire, on change de variable en posant $b - a = h$ (c'est le Δx précédent).

On peut donc remplacer $b - a$ par h, et de plus on a :

$$\begin{array}{rl|l}
 & b \longrightarrow a & -a \\
\Leftrightarrow & b - a \longrightarrow a - a & a - a = 0 \\
\Leftrightarrow & b - a \longrightarrow 0 & b - a = h \\
\Leftrightarrow & h \longrightarrow 0 & \blacksquare
\end{array}$$

Ainsi $m_{(T_a)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ c'est la limite d'un taux de variation.

Voilà comment on va être capable de calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse a. Ce coefficient directeur, qui est la limite d'un taux de variation, on le note $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = m_{(T_a)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$ (sous réserve d'existence)

Quelques exemples de calculs

Soient $f(x) = x^2$ et $A(a, f(a))$ donc $f(a) = a^2$.

↳ $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$

↳ $f(a) = a^2$

↳ $f(a+h) - f(a) = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = h^2 + 2ah = h(h+2a)$

↳ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{h(h+2a)}{h} = h + 2a$

↳ $h \longrightarrow 0$ | $+2a$

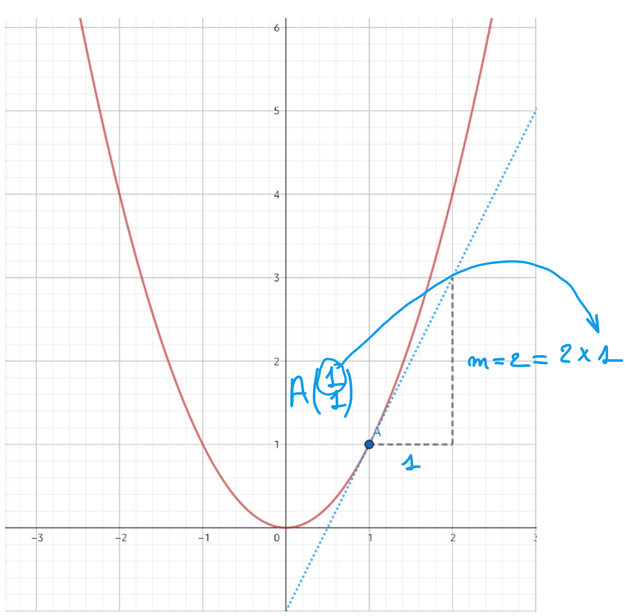
$\Leftrightarrow h+2a \longrightarrow 2a$

↳ $$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2a) = 2a}$$

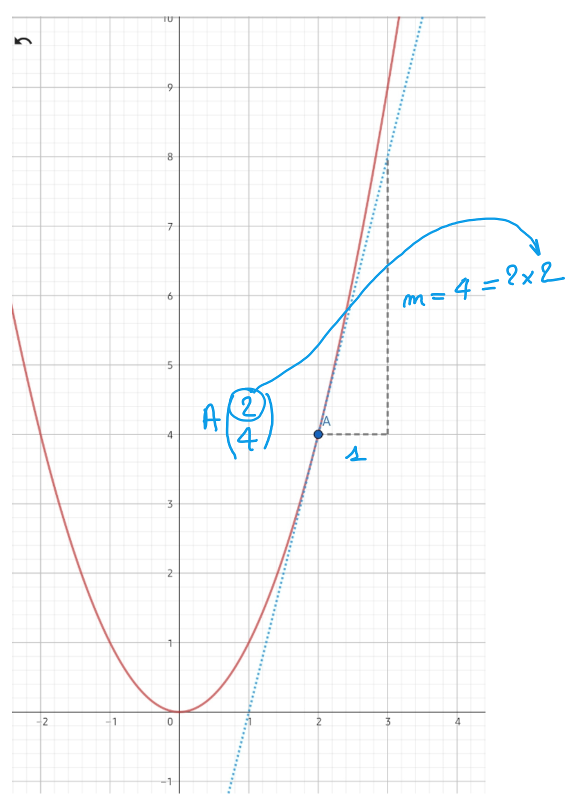
Le coefficient directeur d'une tangente à la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2$ en un point A d'abscisse a est $m_{(T_a)} = 2a$

Par exemple

si $a = 1$ alors $m_{(T_a)} = 2$



si $a = 2$ alors $m_{(T_a)} = 4$



⚙ Soient $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $A\left(a\,,\,f(a)\right)$ donc $f(a) = \dfrac{1}{a}$.

(bien sûr on travaille sur $\mathbb{R}^*$).

↪ $f(a+h) = \dfrac{1}{a+h}$

↪ $f(a) = \dfrac{1}{a}$

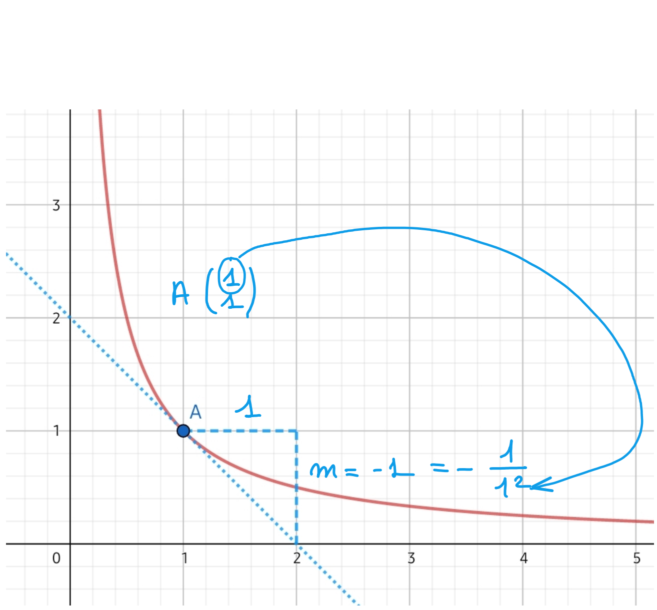
↪ $f(a+h) - f(a) = \dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \dfrac{-h}{a(a+h)}$

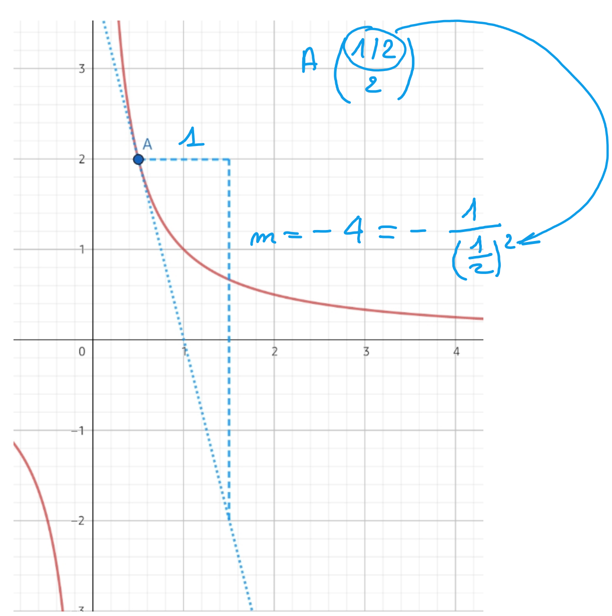
↪ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{-h}{a\,h\,(a+h)} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$

↪

$h \longrightarrow 0$	$+a$
$\Leftrightarrow\ a+h \longrightarrow a$	$\times a$
$\Leftrightarrow\ a(a+h) \longrightarrow a^2$	inverse
$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{a(a+h)} \longrightarrow \dfrac{1}{a^2}$	opposé
$\Leftrightarrow\ -\dfrac{1}{a(a+h)} \longrightarrow -\dfrac{1}{a^2}$ ■	

↪ $$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}}$$





Exercice : Soit f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Calculer, s'il existe, $f'(2)$

↳ $f(2+h) = \sqrt{2+h}$

↳ $f(2) = \sqrt{2}$

↳ $f(2+h) - f(2) = \sqrt{2+h} - \sqrt{2}$

$$= \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}+h - \cancel{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

$$f(2+h) - f(2) = \frac{h}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

$$a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

↳ $$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{\cancel{h}} \times \frac{\cancel{h}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

↳ $$h \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$h \to 0$

$\Leftrightarrow h+2 \to 2$ $\quad$ $\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \sqrt{h+2} \to \sqrt{2}$ $\quad$ $+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{h+2} + \sqrt{2} \to 2\sqrt{2}$ $\quad$ inverse

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}$

donc
$$\boxed{f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Cas général : calcul de $f'(a)$ pour $f(x) = \sqrt{x}$

De la même manière on peut faire le calcul en $a \in \mathbb{R}_+^*$.

En remplaçant 2 par a dans le calcul précédent, on aboutit à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\cancel{h}} \times \frac{\cancel{h}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

cette notation signifie que $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ quand h tend vers 0.

Ainsi $$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

⚠ On remarque que $f'(a)$ ne peut pas se calculer pour $a = 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de nombre dérivé en 0

$$\lim_{a \to 0} f'(a) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2\sqrt{a}} = +\infty$$

La fonction racine carré admet une tangente verticale en 0.