Fonctions dérivées

Quelques exemples de calculs de fonctions dérivées (très simplifié).

- $f(x) = x^4$

$(x^n)' = n x^{n-1}$ avec $n = 4$

$(x^4)' = 4x^3$

$f'(x) = 4x^3$

- $f(x) = 3x^7$

$f = \lambda u$ avec $\lambda = 3$ et $u(x) = x^7$

$f' = \lambda u'$ avec $u'(x) = 7x^6$

$f'(x) = 3 \times 7 x^6$

$f'(x) = 21 x^6$

- $f(x) = -4x^3 + \dfrac{2}{x}$

$f = g + h$ avec $g(x) = -4x^3$ et $h(x) = \dfrac{2}{x}$

et $f' = g' + h'$ donc il faut calculer g' et h'.

Or $g = \lambda u$ avec $\lambda = -4$ et $u(x) = x^3$

$h = \mu v$ avec $\mu = 2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$

donc $g'(x) = -4 \times 3x^2 = -12x^2$

$h'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^2}$

ou alors

$f = -4u + 2v$ avec

$u(x) = x^3$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$

d'où $f' = -4u' + 2v'$

$f'(x) = -4 \times 3x^2 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$f'(x) = -12x^2 - \dfrac{2}{x^2}$

$f'(x) = -12x^2 - \dfrac{2}{x^2}$

$$f(x) = -4x^3 + \frac{2}{x}$$

$$f = au + bv \quad \text{avec} \quad a = -4 \ , \ u(x) = x^3$$

$$b = 2 \ , \ v(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Or} \quad f' = au' + bv' \quad \text{avec} \quad u'(x) = 3x^2$$

$$v'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -4 \times 3x^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = -12x^2 - \frac{2}{x^2}$$

- $f(x) = -3x^7 + 2\sqrt{x} + 5e^x + 6$

$$f = -3u + 2v + 5w + t$$

avec $u(x) = x^7$

$v(x) = \sqrt{x}$

$w(x) = e^x$

$t(x) = 6$

$$f' = -3u' + 2v' + 5w' + t'$$

avec $u'(x) = 7x^6$

$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$w'(x) = e^x$

$t'(x) = 0$

$$f'(x) = -3 \times 7x^6 + \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} + 5e^x$$

$$f'(x) = -21x^6 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 5e^x$$

- $f(x) = \frac{3}{x} + 4\sqrt{x} + 3x - 7x^{10}$

$$f(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + 3x - 7x^{10}$$

$f'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 - 7 \times 10\, x^9$

$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 70\, x^9 + 3.$

- $f(x) = x^2 \sqrt{x}$

$f = uv$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$f' = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = (2x)(\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2)$

$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$

$\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x\,(\sqrt{x})^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x}}} = x\sqrt{x}$

$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2}$

$f'(x) = \frac{5}{2}\, x\sqrt{x}$

- $f(x) = (3x^2 + 4x + 5)\, e^x$

$f = uv$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x + 5$

$v(x) = e^x$

$f' = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 6x + 4$

$v'(x) = e^x$

$f'(x) = (6x + 4)\, e^x + (3x^2 + 4x + 5)\, e^x$

$f'(x) = (3x^2 + 10x + 9)\, e^x$

- $f(x) = (2x^7 + 3x + 2)\sqrt{x}$

$f'(x) = (14x^6 + 3)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^7 + 3x + 2)$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x}(14x^6+3)\sqrt{x} + 2x^7+3x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2(14x^6+3)x + 2x^7+3x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{30x^7+9x+2}{2\sqrt{x}}$$

60 **1.** $f(x)=5x^3-7x+2$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

2. $f(t)=-7t^2-\dfrac{3}{t}+5$ avec $\mathrm{I}=]0;+\infty[$

3. $f(x)=(2x-3)^2(x^2+1)$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

4. $f(a)=\dfrac{4a^5-10a^2+3}{2a}$ avec $\mathrm{I}=]-\infty;0[$

1 $f'(x) = 15x^2 - 7$

2 $f'(t) = -14t + \dfrac{3}{t^2}$

3 $f(x) = (4x^2-12x+9)(x^2+1) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 12x + 9$

- $f'(x) = 16x^3 - 36x^2 + 26x - 12$

- $f = uv$ avec $u(x) = 4x^2-12x+9$ et $v(x) = x^2+1$

  $u'(x) = 8x - 12 = 4(2x-3)$ $v'(x) = 2x$.

  $f' = u'v + v'u$

$f'(x) = 4(2x-3)(x^2+1) + 2x(4x^2-12x+9)$ et on développe.

- $f = (u^2)\times(v)$ avec $u(x) = 2x-3$ et $v(x) = x^2+1$

$f' = (u^2)'\times(v) + (v)'\times(u^2) = 2u'u\,v + v'u^2$

$$f'(x) = 2 \times 2\,(2x-3)(x^2+1) + 2x\,(2x-3)^2$$

4 $f(a)=\dfrac{4a^5-10a^2+3}{2a}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(a) = 4a^5 - 10a^2 + 3$ et $v(a) = 2a$

$u'(a) = 20a^4 - 20a$ $\quad v'(a) = 2$

$u'(a) = 20a(a^3-1)$ et $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$

1 est une racine « évidente » de a^3-1.

$u'(a) = 20a(a-1)(a^2+a+1)$

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(a) = \frac{20a(a^3-1) \times 2a - 2(4a^5 - 10a^2 + 3)}{4a^2}$$

$$f'(a) = \frac{(20a^4 - 20a)(2a) - 2(4a^5 - 10a^2 + 3)}{4a^2}$$

$$f'(a) = \frac{40a^5 - 40a^2 - 8a^5 + 20a^2 - 6}{4a^2}$$

$$f'(a) = \frac{32a^5 - 20a^2 - 6}{4a^2} \qquad \left(= 8a^3 - 5 - \frac{6}{4a^2} \right)$$

61 **1.** $f(t) = 2t^2 + \dfrac{5}{t^2} - 5$ avec $I =]0\,;+\infty[$

2. $f(t) = 3 - 4t - \dfrac{2}{3t^3}$ avec $I =]-\infty\,;0[$

3. $f(x) = 6\sqrt{x} - \dfrac{3}{10x^5}$ avec $I =]0\,;+\infty[$

4. $f(a) = \dfrac{-3a^4 + a^2 - 1}{8a^4}$ avec $I =]-\infty\,;0[$

1

$f(t) = 2t^2 + 5t^{-2} - 5$

$f'(t) = 2 \times 2t + 5 \times (-2t^{-3}) + 0$

$$f'(t) = 4t - \frac{10}{t^3} = \frac{4t^4 - 10}{t^3} = 2 \times \frac{2t^4 - 5}{t^3}$$

<u>Remarque</u> : résoudre $f'(t) = 0$

Soit $t \in \mathbb{R}^*$

$f'(t) = 0$ ssi $\dfrac{2t^4 - 5}{t^3} = 0$

ssi $2t^4 - 5 = 0$

ssi $t^4 = (t^2)^2 = \dfrac{5}{2} > 0$

ssi $t^2 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ car $t^2 = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ est impossible.

ssi $t = -\sqrt{\sqrt{\dfrac{5}{2}}}$ ou $t = \sqrt{\sqrt{\dfrac{5}{2}}}$ ■

- <u>Autre stratégie</u>

$f(t) = 2t^2 + \dfrac{5}{t^2} - 5$ $\qquad f = 2u + 5v - 5$ avec $u(t) = t^2$

$f' = 2u' + 5v'$ $\qquad v(t) = \dfrac{1}{t^2}$

Or $u'(t) = 2t$ et il reste à déterminer $v'(t)$.

Mais $v = \dfrac{1}{w}$ avec $w(t) = t^2$ et $w'(t) = 2t$

donc $v' = -\dfrac{w'}{w^2} = -\dfrac{2t}{t^4} = -\dfrac{2}{t^3}$

Ainsi $f'(t) = 2 \times 2t + 5 \times \left(-\dfrac{2}{t^3}\right) = 4t - \dfrac{10}{t^3}$ ■

- <u>Dernière stratégie</u>

$f(t) = 2t^2 + 5 \times \left(\dfrac{1}{t}\right)^2 - 5$, $f = 2u + 5(v^2) - 5$ avec $u(t) = t^2$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$

$$f' = 2u' + 5 \times 2v'v$$

donc $\quad f'(t) = 2 \times 2t + 10 \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) \times \frac{1}{t}$

$$f'(t) = 4t - \frac{10}{t^3}$$

2. $f(t) = 3 - 4t - \dfrac{2}{3t^3}$ avec $I =]-\infty ; 0[$

$f(t) = 3 - 4t - \frac{2}{3} t^{-3}$ et $(t^n)' = n t^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

$f'(t) = 0 - 4 - \frac{2}{\cancel{3}}(-\cancel{3} t^{-4})$

$f'(t) = -4 + \frac{2}{t^4} = \frac{2 - 4t^4}{t^4} = -2 \, \frac{2t^4 - 1}{t^4}$

$f'(t) = -\frac{4}{t^4}\left(t^4 - \frac{1}{2}\right)$

$f'(t) = -\frac{4}{t^4}\left((t^2)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$ avec $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(t) = -\frac{4}{t^4}\left(t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2$

$f'(t) = -\frac{4}{t^4}\left(t - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\left(t + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\left(t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Mis sous cette forme, on peut faire un tableau de signe et en déduire les variations de f

3. $f(x) = 6\sqrt{x} - \dfrac{3}{10x^5}$ avec $I =]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\cancel{10}} \times \left(-\cancel{5}\, x^{-6}\right)$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^6}$$

4. $f(a) = \dfrac{-3a^4 + a^2 - 1}{8a^4}$ avec $I =]-\infty ; 0[$

$$f'(a) = \frac{(-3 \times 4a^3 + 2a)(8a^4) - (8 \times 4a^3)(-3a^4 + a^2 - 1)}{(8a^4)^2}$$

$$f'(a) = \frac{\cancel{-96a^7} + 16a^5 + \cancel{96a^7} - 32a^5 + 32a^3}{64a^8}$$

$$f'(a) = \frac{-16a^5 + 32a^3}{64a^8} = \frac{\cancel{-16a^3}(a^2 - 2)}{\cancel{16a^3} \times 4a^5}$$

$$f'(a) = -\frac{a^2 - 2}{4a^5} = -\frac{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{4a^5}$$

62 1. $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$ avec $I =]0 ; +\infty[$

2. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x + 3}$ avec $I = \mathbb{R}$

3. $f(t) = \dfrac{4t - 2}{2t^2 + 3t}$ avec $I =]0 ; +\infty[$

4. $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{x + 1}$ avec $I =]-1 ; +\infty[$

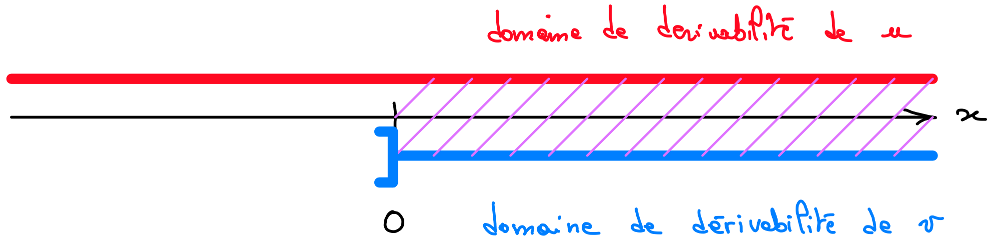
1 • <u>Domaine de définition de f</u>

On a $f = u \times v$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Or :
- u est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale
- v est définie sur $\mathbb{R}_+$

Par produit, f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$: $\boxed{D_f = \mathbb{R}_+}$

- Domaine de dérivabilité de f



u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Calcul de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)$

Remarque :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f = u \times v$ avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)$ ■

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}}$$

- Etude du signe de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $5x^2+1 > 0$ et $\sqrt{x} > 0$ donc par quotient $f'(x) > 0$.

- Etude des variations de f

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)$

Or $2x\sqrt{x} > 0$ (par produit) et $\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} > 0$ (par quotient)

donc $f'(x) > 0$ (par somme).

2. $f(x) = \frac{4}{x^2+2x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$

- Domaine de définition de f

On a $f = 4 \times \frac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 2x + 3$.

v est un trinôme du 2^d degré (défini sur $\mathbb{R}$) de discriminant

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(3) < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) > 0$.

Par quotient , $\frac{1}{v}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et par produit f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

- Domaine de dérivabilité de f

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) \neq 0$ donc par quotient $\frac{1}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi , par produit f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Calcul de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4 \times \left(-\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\right)$

$$\boxed{f'(x) = -8\,\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}}$$

- Etude du signe de $f'(x)$ et variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+2x+3)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x+1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Attention au signe : $f'(x) = -8 \times .....$

$f(-1) = 2$

3. $f(t) = \dfrac{4t-2}{2t^2+3t}$ avec $I =]0;+\infty[$

- Domaine de définition de f

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(t) = 4t-2$ et $v(t) = 2t^2+3t$.

Or u et v sont définies sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynomiale et $v(t) = t(2t+3) = 0$ pour $t \in \left\{-\frac{3}{2} ; 0\right\}$.

Par quotient, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2} ; 0\right\}$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2} ; 0\right\}}$$

- Domaine de dérivabilité de f.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car ce sont de fonctions polynomiales et $v(t) = 0$ pour $t = -\frac{3}{2}$ ou $t = 0$.

Donc par quotient, f est dérivable sur $]-\infty;-\frac{3}{2}[$, sur $]-\frac{3}{2};0[$ et sur $]0;+\infty[$.

- <u>Calcul de $f'(t)$</u>

Sur chacun de intervalles où f est dérivable, on a :

$$f'(t) = \frac{4(2t^2+3t)-(4t+3)(4t-2)}{(2t^2+3t)^2}$$

$$f'(t) = \frac{4t(2t+3)-(4t+3)(4t-2)}{(2t^2+3t)^2}$$ pas de factorisation possible.

$$f'(t) = \frac{-8t^2+8t+6}{(2t^2+3t)^2}$$

$$\boxed{f'(t) = 2\,\frac{-4t^2+4t+3}{(2t^2+3t)^2}}$$

- <u>Signe de $f'(t)$ et variations de f</u>

  - $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2};0\right\}$ on a $(2t^2+3t)^2>0$.

    ou autrement dit, $\forall t \in]-\infty,-\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2},0[\cup]0,+\infty[$.

  - $t \mapsto -4t^2+4t+3$ est un trinôme du 2d degré de discriminant $\Delta = (4)^2-4(-4)(3) = 64>0$, qui admet donc deux racines t_1 et t_2 telles que :

$$t_1 = \frac{-(4)-\sqrt{64}}{2(-4)} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-(4)+\sqrt{64}}{2(-4)}$$

soit $t_1 = \frac{3}{2}$ et $t_2 = -\frac{1}{2}$

On en déduit le tableau suivant :

t	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4t^2+4t+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(2t^2+3t)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	0^- ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{4}{9}$	↘	0^+

$$\frac{4t-2}{2t^2+3t}$$

4. $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{x+1}$ avec $I = [0\ ;+\infty[$

- f est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc f est définie sur I.

- <u>Etude de la dérivabilité sur I</u>

$f = 3\,\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x+1$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x+1>0$.

donc par quotient, f est dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

- <u>Calcul de $f'(x)$</u>

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = 3 \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\left(x+1 - \sqrt{x} \times 2\sqrt{x}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{x}(x+1)^2}}$$

- <u>Signe de $f'(x)$ et variations de f sur $I = \mathbb{R}_+^*$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \dfrac{3}{2\sqrt{x}(x+1)^2} > 0$ de façon triviale.

Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $1-x$ qui est une fonction affine.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0^+

$f(1) = \dfrac{3}{2}$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$