Chapitre 6 : Les fonctions dérivées

1 Résumé sur la notion de nombre dérivé

On a vu dans la première partie du cours sur la dérivation le lien entre la notion de coefficient directeur d'une droite et celui de taux de variation d'une fonction. Ce lien se construit à partir des deux points d'intersection entre une droite et la courbe représentative d'une fonction.

Si on se concentre sur la droite (AB) :

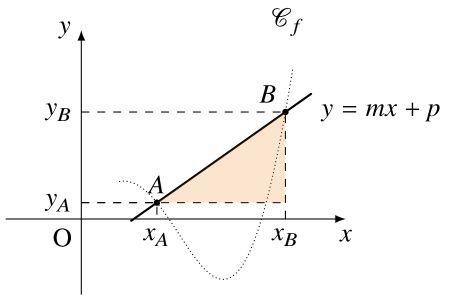


Figure 6.1

le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Si on se concentre sur la courbe $\mathscr{C}_f$:

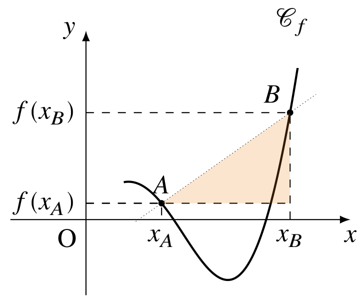


Figure 6.2

le taux de variation de f entre x_A et x_B est :

$$\tau_{f\,,\,x_A\,,\,x_B} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

Puisque les points A et B sont sur la courbe, on a alors $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$, ce qui a permis d'établir la proposition suivante :

Proposition 1

Si A et B sont deux points de la courbe représentative d'une fonction f, ayant respectivement pour coordonnées $(x_A\,,\,y_A)$ et $(x_B\,,\,y_B)$, alors le taux de variation de f entre x_A et x_B est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

Autrement dit : $m_{(AB)} = \tau_{f\,,\,x_A\,,\,x_B}$

Si on fait coïncider un point M avec le point B, et qu'on le fait glisser vers le point A le long de la courbe $\mathscr{C}_f$, alors la sécante (AM) change d'inclinaison autour du point A, et lorsque le point M se trouve dans son voisinage (c'est à dire infiniment près de A) la sécante (AM) tend vers une position « limite » qui se trouve être la tangente à la courbe au point A, notée (T_A).

De même, le taux de variation tend également vers une valeur limite qui est le coefficient directeur de la tangente au point A.

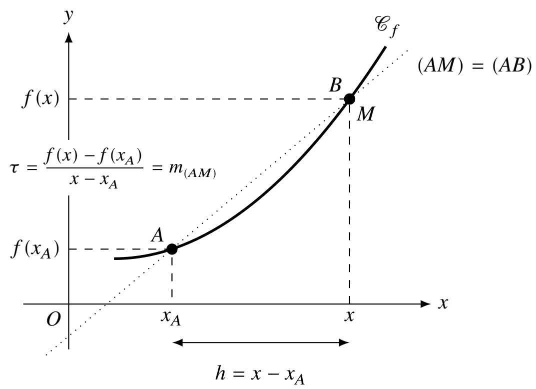


Figure 6.3 : τ est fonction de x.

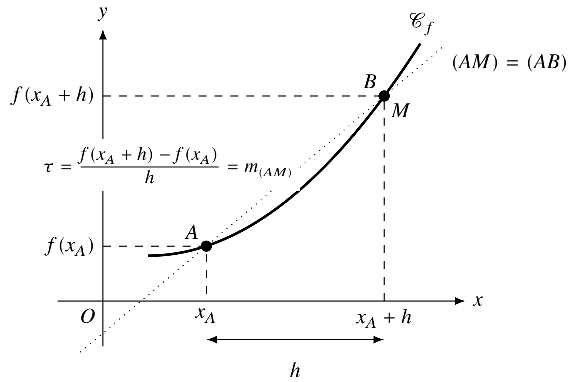


Figure 6.4 : avec le changement de variable, τ est fonction de h.

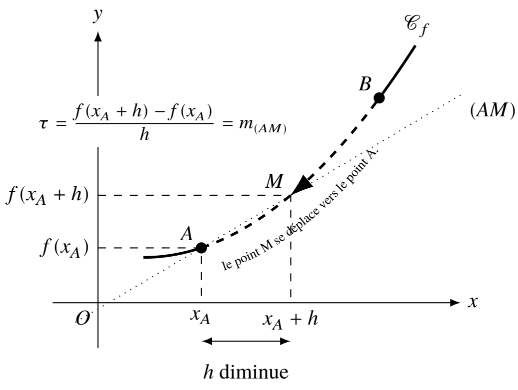


Figure 6.5 : le point M glisse vers le point A, h diminue.

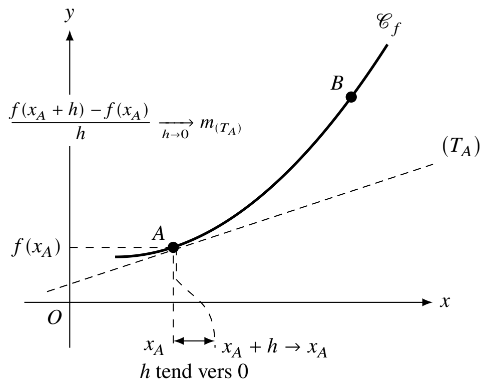


Figure 6.6 : le point M est au voisinage du point A, h tend vers 0.

On obtient alors la définition suivante :

Définition 2

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un réel dans I et h un réel non nul.

On pose $\tau_{f,x_0}(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si son taux de variation $\tau_{f,x_0}(h)$ entre x_0 et x_0+h possède une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de f en x_0, et on le note $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{si cette limite est finie.}$$

Remarque : la notation $\lim\limits_{\dots} \dots$ ne s'utilise qu'après s'être assuré de l'existence de cette limite. On utilisera préférentiellement une notation avec une flèche pour montrer ce vers quoi tend une expression, et si cette dernière tend vers un réel ℓ (la limite existe et elle est finie) ou vers un infini (la limite existe et n'est pas finie), on pourra alors écrire $\lim\limits_{\dots} = \ell$ ou ∞. Par exemple :

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction qui n'admet pas de limite en $+\infty$, car elle varie constamment entre -1 et 1 : on ne peut pas utiliser la notation $\lim\limits_{\dots} \dots$
- L'expression x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On note $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et comme cette limite existe, on peut donc écrire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} + 2$. On a $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et par somme $\dfrac{1}{x} + 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$.

  Ainsi g admet une limite en $+\infty$ et on peut écrire que cette limite est égale à 2 : $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 2$.

En s'appuyant sur la notion de limite, on peut donc calculer le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point donné.

Exemple : soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$. Calculons, s'il existe, le nombre dérivé de f en 1.

- $f(1+h = -3(1+h)^2 + 2(1+h) - 1$
  $= -3h^2 - 4h - 2$
- $f(1) = -2$
- $f(1+h) - f(1) = -3h^2 - 4h$
- $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -3h - 4 \xrightarrow[h\to 0]{} -4$
- la limite du taux d'accroissement de f en 1 existe et donc $f'(1) = -4$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en 1 vaut -4.

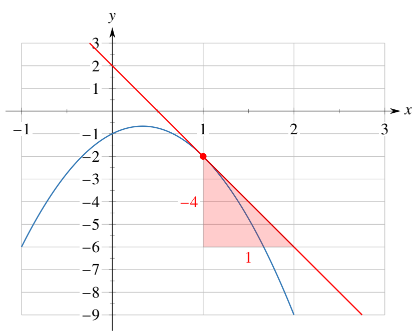


Figure 6.7

Remarque : il existe une autre façon d'exprimer le nombre dérivé : au lieu d'écrire que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \ell$ on peut dire qu'il existe une fonction ε telle que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, ce que l'on peut remanier en écrivant $f(x_0+h) = f(x_0) + \ell\, h + h\, \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Cette réécriture peut s'avérer entre autre intéressante pour établir certaines formules de fonctions dérivées.

2 Fonction dérivée

2.1 Introduction

Pour montrer l'importance d'un nombre dérivé, nous nous appuierons sur des interprétations géométriques.

Tout d'abord, on peut remarquer que le taux de variation d'une fonction entre deux deux points A et B est liée à l'angle α que fait la droite (AB) avec l'axe des abscisses. En effet :

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h} \quad \text{et donc} \quad \tan(\alpha) = m_{(AM)} = \tau_{f,x_A}(h)$$

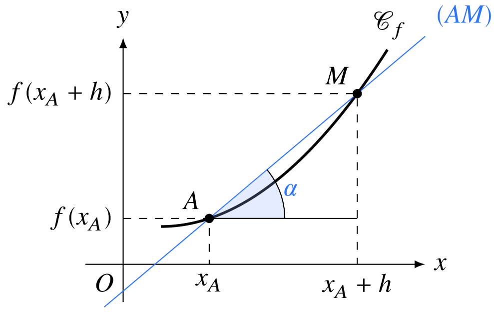


Figure 6.8

Lorsqu'on fait tendre le point M vers le point A, la sécante (AM) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe au point A, et de même, l'angle α tend vers un angle limite noté θ.

$$f'(x_A) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h} = m_{(T_A)} = \tan(\theta)$$

La mesure d'angle θ représente l'inclinaison que fait la tangente (géométrique) à la courbe au point A, ce qui correspond également au coefficient directeur de cette tangente en ce point.

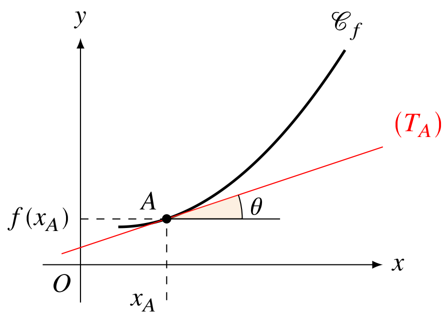
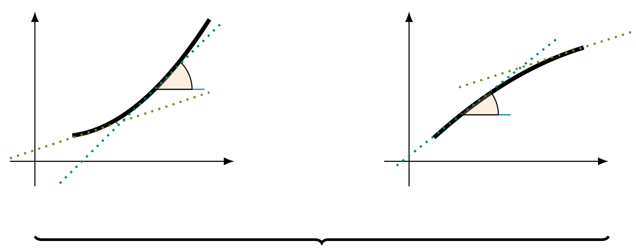


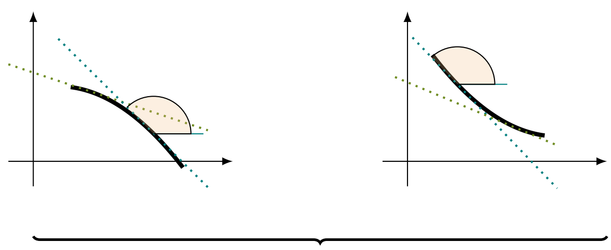
Figure 6.9

Ainsi, localement, un nombre dérivé peut renseigner sur le sens de variation d'une fonction. En effet, s'il est positif (θ aigu, coefficient directeur de la tangente positif), cela signifie que localement la fonction est croissante. Au contraire, s'il est négatif (θ obtus, coefficient directeur de la tangente négatif), cela signifie que localement la fonction est décroissante. Entre les deux se trouve le cas d'un nombre dérivé nul, qui indique (en général) la présence d'un extremum (maximum ou minimum).



fonction croissante
$\Leftrightarrow$ coefficient directeur de la tangente positif
$\Leftrightarrow$ nombre dérivé positif
$\Leftrightarrow$ $\tan(\theta)$ positif
$\Leftrightarrow$ θ aigu

Figure 6.10



fonction décroissante
$\Leftrightarrow$ coefficient directeur de la tangente négatif
$\Leftrightarrow$ nombre dérivé négatif
$\Leftrightarrow$ $\tan(\theta)$ négatif
$\Leftrightarrow$ θ obtus

Figure 6.11

Si on étend ce procédé sur tout un domaine, on obtient alors les variations de la fonction sur celui-ci.

Exemple : reprenons la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$. Calculons, s'il existe, le nombre dérivé de f en un réel x.

- $$\begin{aligned} f(x+h) &= -3(x+h)^2 + 2(x+h) - 1 \\ &= -3\left(x^2 + 2xh + h^2\right) + 2x + 2h - 1 \\ &= -3x^2 - 6xh - 3h^2 + 2x + 2h - 1 \\ &= -3x^2 + 2x - 1 - 6xh - 3h^2 + 2h \end{aligned}$$
  $$f(x+h) = f(x) - 6xh - 3h^2 + 2h$$
- $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -6x - 3h + 2 \xrightarrow[h \to 0]{} -6x + 2$$
- la limite du taux d'accroissement de f en x existe et donc $f'(x) = -6x + 2$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en x vaut $-6x + 2$. On vient de calculer **une fonction dérivée**.

  On peut remarquer que pour $x = 1$, on retrouve le nombre dérivé calculé précédemment.

- Une étude du signe de cette fonction dérivée permet alors de conclure sur les variations de la fonction. En effet, la fonction $f' : x \mapsto -6x + 2$ est une fonction affine qui s'annule en $x = \frac{1}{3}$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

  Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$ la fonction f est donc croissante, tandis que sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ la fonction est décroissante. On en déduit le tableau (complet) suivant :

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

2.2 Définition d'une fonction dérivée

I désigne par la suite un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les résultats pourront s'étendre à des réunions d'intervalles.

Définition 3

> Une fonction f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel x de I.
>
> La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. Par convention, on note cette fonction f'.

La notation f' est due au mathématicien Lagrange (1736 - 1813). Elle est très simple à utiliser dans le cas des fonctions qui dépendent d'une seule variable. Pour obtenir des dérivées successives, on rajoute des symboles « prime ». Par exemple, la fonction dérivées seconde (qui est la fonction dérivée de la première fonction dérivée) se note $f"$: $f" = (f')'$. Ainsi, si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$ et $f"(x) = 2$.

On peut tout de même signaler qu'il existe deux autres notations : $\mathrm{D}f$ et $\dfrac{df}{dx}$ qui est très utilisée en physique.

Pour calculer des fonctions dérivées en toute généralités, on va tout d'abord s'intéresser aux fonctions dérivées des fonctions de référence. Pour les obtenir, il suffit de faire le même type de calcul que dans l'exemple précédent, c'est à dire, calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Ensuite on s'intéressera à l'application des fonctions dérivées sur l'étude des variations de fonctions, avec la caractérisation des extremums.

2.3 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Certains de ces résultats seront démontrés en annexe.

Proposition 4

fonction f	expression	domaine de définition	dérivable sur	fonction dérivée f'
constante	p où $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
identité	x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
affine	$mx + p$ où $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
carré	x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
cube	x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
puissance	x^n où $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$	$-\frac{1}{x^2}$
racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
valeur absolue	$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$	$\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
exponentielle	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Exemple :

- soit $f(x) = x^7$ alors $f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$.
- soit $g(x) = \dfrac{1}{x^7} = x^{-7}$, alors $g'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = \dfrac{-7}{x^8}$.

Connaissant les fonctions dérivées de ces fonctions usuelles, nous allons voir maintenant s'il est possible de les «combiner», pour étudier les variations de fonctions plus complexes. Par exemple, est-il possible d'étudier «facilement» la fonction $x \mapsto -4x^2 + 3\sqrt{x}$? Toutes ces nouvelles fonctions que l'on peut créer résultent d'opérations (addition, multiplication, division) entre des fonctions de références, et les fonctions dérivées découleront de ces opérations.

2.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, et deux réels a et b. On définit les opérations suivantes :

- la multiplication d'une fonction par un scalaire : la fonction au est définie sur I par $(au)(x) = au(x)$
- la somme de deux fonctions : la fonction $u + v$ est définie sur I par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$
- le produit de deux fonctions : la fonction uv est définie sur I par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$
- le quotient de deux fonctions : si pour tout nombre réel $x \in I$ on a $v(x) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie sur I par $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Proposition 5

Fonction à dériver	dérivable	fonction dérivée
au où $a \in \mathbb{R}$	sur I	au'
$u + v$	sur I	$u' + v'$ la dérivée d'une somme est la somme des dérivées
$au + bv$ où $a, b \in \mathbb{R}$	sur I	$au' + bv'$ la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées
uv	sur I	$u'v + v'u$
u^2	sur I	$2u'u$
$\dfrac{u}{v}$	$\forall x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$\dfrac{1}{v}$	$\forall x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$

Exemples :

1. Soit la fonction définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$.
   - On a $f = 2u$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ qui est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$. Ainsi f est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
   - u est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, et donc par produit f est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $f'(x) = 2u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Soit la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4}{x}$.
   - On a $f = 3u - 4v$ avec $u(x) = x^2$ qui est définie sur $\mathbb{R}$, et $v(x) = \frac{1}{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   - u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et v est dérivable sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et $]\,0\,;\,+\infty\,[$. On en déduit par produit par des scalaires puis par somme que f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(x) = 3u'(x) - 4v'(x) = 6x + \dfrac{4}{x^2}$.
3. Soit la fonction définie par $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)\left(x^2 + 3x + 2\right)$.
   - On a $f = uv$ avec $u(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, et $v(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right)$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
   - On a $u = u_1 + u_2$ avec $u_1(x) = \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et $u_2(x) = 2$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que u est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

     Par somme, $u' = u_1' + u_2'$ avec $u_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $u_2'(x) = 0$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
   - On a $v = v_1 + v_2$ avec $v_1(x) = x^2$, $v_2(x) = 3x + 2$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que v est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme, $v' = v_1' + v_2'$ avec $v_1'(x) = 2x$, $v_2'(x) = 3$ donc $v'(x) = 2x + 3$.

- f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right)\left(x^2 + 3x + 2 \right) + \left(2x + 3 \right)\left(\frac{1}{x} + 2 \right) = \frac{4x^3 + 7x^2 - 2}{x^2}.$$

Une fois bien compris ces opérations, **on peut rédiger de façon plus efficace** :

On a $f = uv$ avec $u(x) = \left(\frac{1}{x} + 2 \right)$ et $v(x) = \left(x^2 + 3x + 2 \right)$.

De plus : u est définie sur $\mathbb{R}^*$, et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$,
v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2 \right)\left(x^2 + 3x + 2 \right)$$

$f' = u'v + v'u$

avec $\left| \begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{x} + 2 & v(x) = x^2 + 3x + 2 \\ u'(x) = -\frac{1}{x^2} & v'(x) = 2x + 3 \end{array} \right.$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right)\left(x^2 + 3x + 2 \right) + \left(2x + 3 \right)\left(\frac{1}{x} + 2 \right)$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 7x^2 - 2}{x^2}$$

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 1}$

   On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = x^2 + 1$.

   De plus : u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$,
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) \neq 0$ (car $\forall x \in$, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$).

   On en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}$$

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $\left| \begin{array}{ll} u(x) = 2x + 3 & v(x) = x^2 + 1 \\ u'(x) = 2 & v'(x) = 2x \end{array} \right.$

$$f'(x) = \frac{\left(2 \right)\left(x^2 + 1 \right) - \left(2x \right)\left(2x + 3 \right)}{\left(x^2 + 1 \right)^2}$$

on développe et on réduit le dénominateur

$$f'(x) = = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{\left(x^2 + 1 \right)^2}$$

5. Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4x + 1}$.

   On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$ et $v(x) = 4x + 1$.

   De plus : u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$,
   $v(x) = 0 \iff x = -\dfrac{1}{4}$

   On en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-\frac{1}{4}\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{4x + 1}$$

- $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ *avec* $u(x) = x^2 - 3x + 2$, $u'(x) = 2x - 3$, $v(x) = 4x + 1$, $v'(x) = 4$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(4x + 1) - (4)\left(x^2 - 3x + 2\right)}{(4x + 1)^2}$$

- *on développe et on réduit le numérateur*

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 2x - 11}{(4x + 1)^2}$$

Remarque on remarque que dans le cas d'un quotient, on ne développe pas le dénominateur. En effet, dans la suite on doit faire une étude du signe de la fonction dérivée, et le dénominateur de la fonction dérivée d'un quotient est un carré, donc toujours positif, c'est pour cela que c'est une mauvaise idée de le développer.

2.5 Fonction dérivée de la composée avec une fonction affine

Proposition 6

Soient un intervalle I, et deux réels m et p.

On note J l'intervalle formé des valeurs prises par $mx + p$ lorsque x parcours l'intervalle I.

Si la fonction u est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f : x \mapsto u(mx + p)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I on a :

$$f'(x) = m\, u'(mx + p)$$

Exemples :

- Soit la fonction définie par $f(x) = (2x + 3)^7$.

  On note $u : x \mapsto x^7$. Cette fonction est définie et dérivable pour tout réel x, et sa fonction dérivée est $u'(x) = 7x^6$.

  u étant dérivable pour tout réel x, elle l'est donc aussi pour tout réel de la forme $2x + 3$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto u(2x + 3)$, qui est la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x + 3$ par la fonction $u : x \mapsto x^7$, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction dérivée de f est alors $f'(x) = 2\,u'(2x + 3) = 2 \times 7(2x + 3)^6 = 14\,(2x + 3)^6$.

- Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x + 4}$.

  On note $u : x \mapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée est $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  u étant dérivable pour tout réel x strictement positif, elle l'est donc aussi pour tout réel de la forme $3x + 4$ à condition qu'il soit strictement positif. Or $3x + 4 > 0 \iff x > -\frac{4}{3}$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto u(3x + 4)$, qui est la composée de la fonction affine $x \mapsto 3x + 4$ par la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$, est définie sur $\left[-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$.

  La fonction dérivée de f est alors $f'(x) = 3\,u'(3x + 4) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x + 4}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$

3 Étude des variations d'une fonction

Rappels : soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est constante sur I lorsqu'il existe un réel k tel que : $\forall x \in I\ ,\ f(x) = k$.
- f est croissante sur I lorsque : $\forall x, y \in I\ ,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ (on peut aussi écrire $x < y$).
- f est strictement croissante sur I lorsque : $\forall x, y \in I\ ,\ x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est décroissante sur I lorsque : $\forall x, y \in I\ ,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$ (on peut aussi écrire $x < y$).
- f est strictement décroissante sur I lorsque : $\forall x, y \in I\ ,\ x < y \implies f(x) > f(y)$

Théorème 7 : fonction dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
- $f' \geq 0$ sur I si et seulement si f est croissante sur I.
- $f' \leq 0$ sur I si et seulement si f est décroissante sur I.
- si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.
- si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : pour ce qui concerne la stricte monotonie on perd l'équivalence. En effet, par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, et pourtant sa fonction dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0.

3.1 Extrema d'une fonction

Définition 8

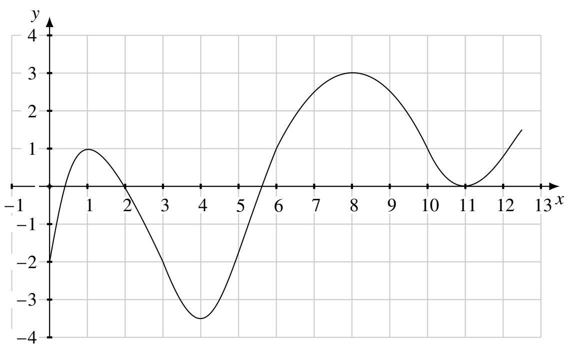
Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.

- f admet un maximum en x_0 si et seulement si $\forall x \in I\ ,\ f(x) \leq f(x_0)$.

  Le réel $M = f(x_0)$ est alors le maximum de f sur I atteint en x_0.
- f admet un minimum en x_0 si et seulement si $\forall x \in I\ ,\ f(x) \geq f(x_0)$.

  Le réel $m = f(x_0)$ est alors le minimum de f sur I atteint en x_0.
- Un extremum de f sur I est un maximum ou un minimum de f sur I (sous condition d'existence).
- Le réel L est un maximum local (resp. minimum local) de f sur I, s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et tel que L est le maximum (resp. minimum) de f sur J.

Exemple :



- 3 est le maximum de f sur $[\,0\,;\,13\,]$ atteint en 8 car : $\forall x \in [\,0\,;\,13\,]\,,\, f(x) \leq f(8)$ où $f(8) = 3$.
- $-\dfrac{9}{2}$ est le minimum de f sur $[\,0\,;\,13\,]$ atteint en 4 car : $\forall x \in [\,0\,;\,13\,]\,,\, f(x) \geq f(4)$ où $f(4) = -\dfrac{9}{2}$.
- 1 est un maximum **local** de f, car c'est le maximum de f sur $]\,0\,;\,2\,[$.
- 0 est un minimum **local** de f, car c'est le minimum de f sur $]\,10\,;\,12\,[$.

Théorème 9 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction dérivable

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et $a \in J$.

Si f admet un **extremum local** en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Autrement dit, il est nécessaire d'avoir $f'(x_0) = 0$ pour que f admette un **extremum local** en x_0.

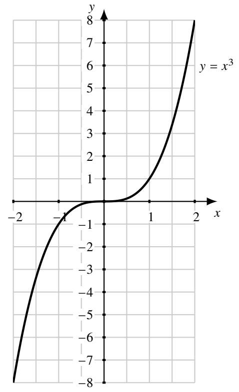
Remarques :

- La courbe représentative de f admet alors une tangente « horizontale » au point d'abscisse x_0.
- La condition « J est un ouvert de $\mathbb{R}$ » est fondamentale : avec un intervalle fermé ce théorème devient faux. En effet, dans l'exemple précédent, dans l'intervalle $[\,0\,;\,2\,]$ il y a un minimum égal à -2 en 0, et pourtant le nombre dérivé n'est pas nul en 0. Dans l'intervalle $]\,0\,;\,2\,[$ il n'y a plus de minimum.

  On peut toutefois raisonner avec un intervalle fermé, en rajoutant comme condition que x_0 ne soit pas une borne de cet intervalle.
- La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

  la fonction $x \mapsto x^3$ est définie, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$, et pourtant $f'(0) = 0$. Le point de coordonnées $(\,0\,,\,0\,)$ est appelé point d'inflexion.

  Pour caractériser un extremum à l'aide de la fonction dérivée, il faut rajouter une condition sur son signe.



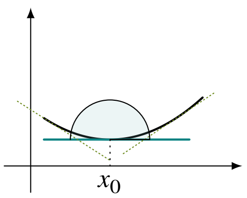
Théorème 10 : condition suffisante d'existence d'un extremum local pour une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et $a \in J$.

Si f' **s'annule en changeant de signe** en x_0, alors $f(x_0)$ est un **extremum local** de f sur J.

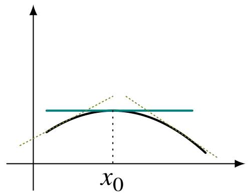
Autrement dit, il est suffisant que f' s'annule en changeant de signe en x_0 pour que f admette un extremum local en x_0.

La figure 6.12 résume ces situations :



passage par un minimum :

le coefficient directeur de la tangente (la « pente ») passe d'une valeur négative à une valeur positive



passage par un maximum :

le coefficient directeur de la tangente (la « pente ») de la tangente passe d'une valeur positive à une valeur négative

Figure 6.12