

❁ Exercice 1 :

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 4w_n + 12$ et $w_0 = 9$.

1. On pose $t_n = w_n + 4$ pour tout entier naturel n . Montrer que (t_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
2. Exprimer t_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression du terme général de (w_n) en fonction de n .

💡 Solution :

1. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= w_{n+1} + 4 \\ &= 4w_n + 12 + 4 \\ &= 4w_n + 16 \\ &= 4(\underbrace{w_n + 4}_{t_n}) \\ &= 4t_n \end{aligned}$$

On a donc $t_{n+1} = 4t_n$. (t_n) est donc une suite géométrique de raison 4. On calcule son premier terme t_0 :

$$t_0 = w_0 + 4 = 9 + 4 = 13$$

2. On en déduit l'expression de t_n en fonction de n pour tout entier naturel n : $t_n = 13 \times 4^n$.
3. Puisque $t_n = w_n + 4$, alors $w_n = t_n - 4$. Ainsi l'expression de w_n en fonction de n est donnée pour tout entier naturel n par : $w_n = 13 \times 4^n - 4$.

❁ Exercice 2 :

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = -8w_n + 18$ et $w_0 = -3$.

1. On pose $t_n = w_n - 2$ pour tout entier naturel n . Montrer que (t_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
2. Exprimer t_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression du terme général de (w_n) en fonction de n .

💡 Solution :

$$\begin{aligned} 1. \text{ Pour tout entier naturel } n, t_{n+1} &= w_{n+1} - 2 \\ &= -8w_n + 18 - 2 \\ &= -8w_n + 16 \\ &= -8(\underbrace{w_n - 2}_{t_n}) \\ &= -8t_n \end{aligned}$$

On a donc $t_{n+1} = -8t_n$. (t_n) est donc une suite géométrique de raison -8 . On calcule son premier terme t_0 :

$$t_0 = w_0 - 2 = -3 - 2 = -5$$

2. On en déduit l'expression de t_n en fonction de n pour tout entier naturel n : $t_n = -5 \times (-8)^n$.
3. Puisque $t_n = w_n - 2$, alors $w_n = t_n + 2$. Ainsi l'expression de w_n en fonction de n est donnée pour tout entier naturel n par : $w_n = -5 \times (-8)^n + 2$.

❁ Exercice 3 :

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 9w_n - 40$ et $w_0 = 2$.

1. On pose $t_n = w_n - 5$ pour tout entier naturel n . Montrer que (t_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.

- Exprimer t_n en fonction de n .
- En déduire l'expression du terme général de (w_n) en fonction de n .

 Solution :

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Pour tout entier naturel } n, t_{n+1} &= w_{n+1} - 5 \\
 &= 9w_n - 40 - 5 \\
 &= 9w_n - 45 \\
 &= 9(\underbrace{w_n - 5}_{t_n}) \\
 &= 9t_n
 \end{aligned}$$

On a donc $t_{n+1} = 9t_n$. (t_n) est donc une suite géométrique de raison 9. On calcule son premier terme t_0 :
 $t_0 = w_0 - 5 = 2 - 5 = -3$

- On en déduit l'expression de t_n en fonction de n pour tout entier naturel n : $t_n = -3 \times 9^n$.
- Puisque $t_n = w_n - 5$, alors $w_n = t_n + 5$. Ainsi l'expression de w_n en fonction de n est donnée pour tout entier naturel n par : $w_n = -3 \times 9^n + 5$.

 Exercice 4 :

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = -8w_n + 9$ et $w_0 = 0$.

- On pose $t_n = w_n - 1$ pour tout entier naturel n . Montrer que (t_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
- Exprimer t_n en fonction de n .
- En déduire l'expression du terme général de (w_n) en fonction de n .

 Solution :

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Pour tout entier naturel } n, t_{n+1} &= w_{n+1} - 1 \\
 &= -8w_n + 9 - 1 \\
 &= -8w_n + 8 \\
 &= -8(\underbrace{w_n - 1}_{t_n}) \\
 &= -8t_n
 \end{aligned}$$

On a donc $t_{n+1} = -8t_n$. (t_n) est donc une suite géométrique de raison -8 .

On calcule son premier terme t_0 : $t_0 = w_0 - 1$
 $= 0 - 1$
 $= -1$

- On en déduit l'expression de t_n en fonction de n pour tout entier naturel n : $t_n = -1 \times (-8)^n$.
- Puisque $t_n = w_n - 1$, alors $w_n = t_n + 1$. Ainsi l'expression de w_n en fonction de n est donnée pour tout entier naturel n par : $w_n = -1 \times (-8)^n + 1$.