

Chapitre 7 : Les suites numériques

1 Notion de suite numérique

Une suite numérique correspond à une liste ordonnée de nombres. Prenons comme exemple une liste de courses (pour la rentrée scolaire, acheter un stylo 4 couleurs, un ruban correcteur, des feuilles simples et un classeur) : cette liste ne constitue pas une suite numérique car il n'y a pas de nombres. Pour ce faire, on peut associer à chaque élément de la liste son prix : 1,25 € pour le stylo, 3,39 € pour le ruban, 2,49 € pour les feuilles et 2,86 € pour le classeur. On met tout dans le caddy, mais pour autant, nous n'avons toujours pas de suite car cela n'est pas ordonné. Enfin, on passe à la caisse et on finit par nous tendre un ticket de caisse sur lequel on trouve une liste ordonnée de nombre (cet ordre correspond à l'ordre de passage), et on obtient alors une suite numérique, comme par exemple (2,49 ; 3,39 ; 2,86 ; 1,25).

On va donner bien sûr un cadre plus théorique des suites numériques, en indexant chaque élément par un entier naturel.

Exemple :

- l'ensemble des nombres pairs par ordre croissant écrits *en extension* est : $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 \dots\}$
- la liste indexée correspondante est : $\{u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 \dots\}$

Cela donne donc la suite de termes : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$, etc. Avec la liste de course on aurait alors eu $u_0 = 2,49$, $u_1 = 3,39$, $u_2 = 2,86$, $u_3 = 1,25$ (cette suite est *finie*).

Ce procédé d'indexage permet d'étudier les listes ordonnées en toute généralité, ce qui permet de modéliser certains phénomènes (une évolution de population, calculer les intérêts d'un placement, etc).

Définition 1 : suite numérique

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{c|c} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto u(n) = u_n \end{array} \quad \text{où } u_n \text{ est le } \textbf{terme général de rang } n \text{ de la suite.}$$

Pour désigner cette suite u , on utilise généralement la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n \geq 0}$, ou plus simplement (u_n) .

Remarques :

- u_{n-1} et u_{n+1} sont respectivement le prédécesseur et le successeur de u_n ,
- le terme u_0 s'appelle le terme initial, ou premier terme,
- u_n correspond au $(n+1)^{\text{e}}$ terme, si la liste commence avec $n=0$,
- ne pas confondre u_n et (u_n) : u_n est le terme général de rang n de la suite (u_n) .

Dans la suite, on va s'intéresser plus particulièrement aux suites numériques définies par des « règles de calculs ».

2 Définir une suite numérique

Il existe deux façons de générer une suite numérique (hormis une génération aléatoire) : par une formule explicite, qui s'appuie sur l'indice n , ou par une formule de récurrence, qui s'appuie sur les termes précédents.

2.1 Les suites numériques définies de façon explicite

Définition 2

Dire qu'une suite (u_n) est définie de façon *explicite*, signifie que les termes u_n de cette suite se calculent directement en fonction de l'indice n . Autrement dit, il existe une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que pour tout entier n on a $u_n = f(n)$.

Dans le cas d'une suite (u_n) définie de façon explicite, puisqu'il existe une fonction f telle que $u_n = f(n)$, le terme u_n est de fait l'image de n par cette fonction f . Or la courbe représentative d'une fonction f correspond à l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, où x est un réel appartenant au domaine de définition de f . La suite se représentera de la même façon, avec un ensemble de points de coordonnées $(n, f(n))$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exemple (en cours) : soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3$.

2.2 Les suites numériques définies par récurrence

Définition 3

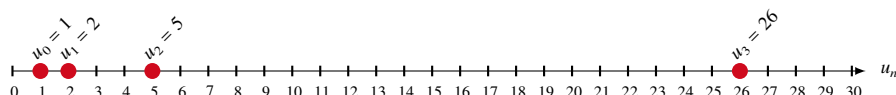
Dire qu'une suite (u_n) est définie par *récurrence*, signifie qu'un terme u_n de cette suite se calcule à partir d'un terme qui le précède. Pour connaître l'ensemble des termes de la suite, il est alors nécessaire d'initialiser la suite par un premier terme.

Autrement dit, dire qu'une suite (u_n) est définie par récurrence à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ signifie qu'il existe une fonction réelle f telle que $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = f(u_n)$, et que le premier terme u_{n_0} est connu.

Remarque : avec l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ la récurrence débute avec $n = 0$ si le terme u_0 est donné. Par contre, on peut aussi écrire que $u_n = f(u_{n-1})$, mais alors la récurrence doit débiter avec $n = 1$ si le terme u_0 est donné. C'est une subtilité à laquelle il sera parfois nécessaire de prêter attention.

Les suites définies par récurrence n'étant pas exprimées explicitement en fonction de n , il n'est plus aussi naturel de vouloir les représenter dans le plan. On pourra par contre les représenter sur un axe.

Exemple : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$



n	u_n	$A_n(u_n)$
0	$u_0 = 1$	$A_0(1)$
1	$u_1 = u_0^2 + 1 = 2$	$A_1(2)$
2	$u_2 = u_1^2 + 1 = 5$	$A_2(5)$
3	$u_3 = u_2^2 + 1 = 26$	$A_3(26)$
4	$u_4 = u_3^2 + 1 = 677$	$A_4(677)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3 Sens de variation d'une suite

3.1 Définition

Définition 4

Soient une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie à partir du rang n_0 , et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n_0$.

- La suite (u_n) est *croissante* à partir du rang p si et seulement si $\forall n \geq p, u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est *décroissante* à partir du rang p si et seulement si $\forall n \geq p, u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est *constante ou stationnaire* à partir du rang p si et seulement si $\forall n \geq p, u_{n+1} = u_n$.

Remarques :

- la définition d'une suite **strictement** monotone se déduit de la précédente en remplaçant toutes les inégalités au sens large par des inégalités au sens strict.
- on peut trouver une autre formulation de ces définitions, un peu plus « technique », mais qui n'est pas s'en rappeler la définition de la *monotonie* d'une fonction vue en classe de seconde :

La suite (u_n) est croissante à partir du rang p si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_{p+1} \geq u_p$

La fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si $\forall a, b \in I, b \geq a \Rightarrow f(b) \geq f(a)$

Il existe plusieurs stratégies pour étudier les variations d'une suite. À notre niveau, nous n'en retiendrons que deux pour ce cours.

3.2 1^{re} stratégie : étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Cela repose sur le fait que : $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n \iff (u_n) \text{ croissante}$
 $\leq \iff \leq \iff \text{décroissante}$

📍 *Exemple (en cours)* : étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2^n}{n+1}$.

3.3 2^e stratégie : étude du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous certaines conditions

Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela repose sur le fait que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff u_{n+1} \geq u_n \iff (u_n) \text{ croissante}$
 $\leq \iff \leq \iff \text{décroissante}$

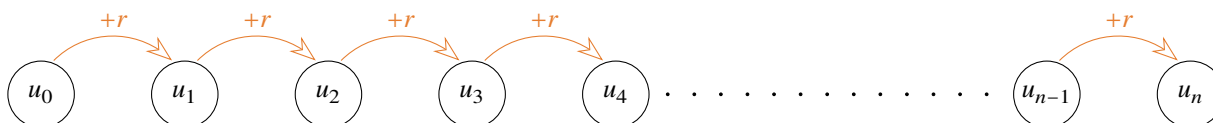
⚠ *Attention !* il faut s'assurer que u_n ne s'annule pas et qu'il soit de signe constant à partir d'un certain rang.

📍 *Exemple (en cours)* : étude de la même suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2^n}{n+1}$.

4 Les suites arithmétiques

4.1 Forme récurrente

Considérons une suite où chacun de ses termes s'obtient en *ajoutant* un réel r à son prédécesseur. Cette suite étant définie par récurrence, il est donc nécessaire de l'initier en posant son premier terme. Une telle suite s'appelle une *suite arithmétique*.



📖 Définition 5

Soit r un nombre réel.

On appelle suite arithmétique de *raison* r , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

📖 Proposition 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

Si pour tout entier n la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, alors cette suite est arithmétique, de raison la valeur de cette différence.

📍 *Exemple (en cours)* montrons que la suite définie par $u_n = 3n + 2$ est une suite arithmétique.

4.2 Forme explicite

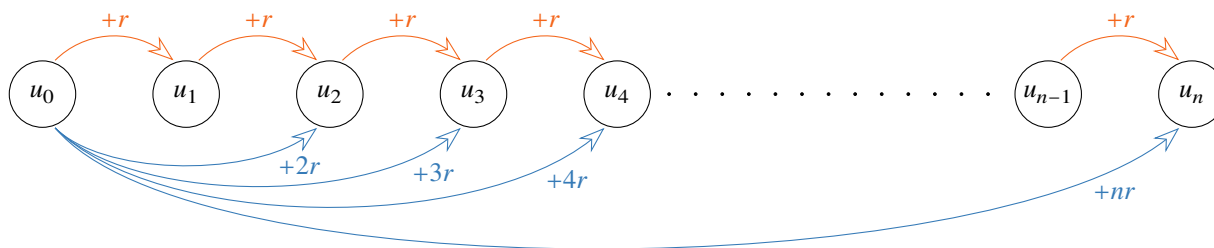
Une suite arithmétique se définit par récurrence, mais on peut également la définir de façon explicite. En effet :

$$u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1 + u_0 = u_{n-1} + r + u_{n-2} + r + \dots + u_1 + r + u_0 + r + u_0$$

$$u_n + \cancel{u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1 + u_0} = nr + \cancel{u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + u_0} + u_0$$

et ainsi il reste $u_n = u_0 + nr$

La figure suivante résume cette situation :



Proposition 7

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors :

$$\square \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr,$$

$$\square \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + (n - p)r \quad \text{qu'on peut aussi retenir avec} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad u_n - u_p = (n - p)r$$

La seconde propriété se calcule simplement par la différence $u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr = (n - p)r$.

4.3 Sens de variation d'une suite arithmétique

Proposition 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

- si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante.
- si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
- si $r = 0$ alors la suite est constante.

Cela se justifie tout simplement à partir de la définition d'une suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.

4.4 Somme des n premiers entiers

Proposition 9

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque :

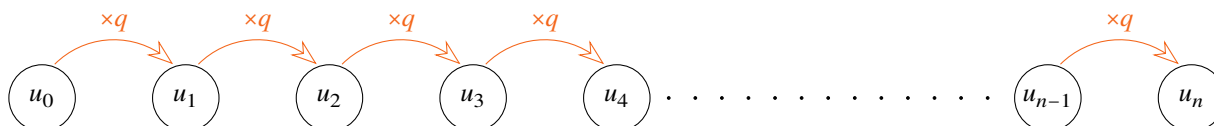
- la somme $1 + 2 + \dots + n$ correspond à la somme des termes de la suite arithmétique de raison 1 et de 1^{er} terme $u_0 = 1$.
- l'expression $\frac{n(n+1)}{2} = n \left(\frac{1+n}{2} \right)$ correspond au produit du nombre de termes, par la moyenne du premier et du dernier terme.

Notation : la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ se note $\sum_{k=1}^n k$. C'est une notation qui deviendra incontournable.

5 Les suites géométriques

5.1 Forme récurrente

Considérons une suite où chacun de ses termes s'obtient en *multipliant* son prédécesseur par un réel q . Cette suite étant définie par récurrence, il est nécessaire de l'initier en posant son premier terme. Une telle suite s'appelle une *suite géométrique*.



✎ Définition 10

Soit q un nombre réel.

On appelle suite géométrique de raison q , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = q \times u_n$.

✎ Proposition 11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique telle qu'aucun de ses termes ne soit nul.

Si pour tout entier n le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, alors cette suite est géométrique de raison la valeur de ce quotient.

📍 **Exemple (en cours) :** montrons que la suite définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique.

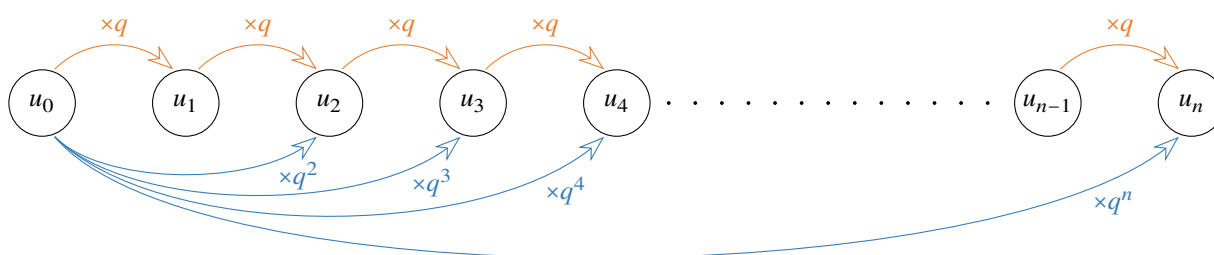
5.2 Forme explicite

Une suite géométrique se définit par récurrence, mais on peut également la définir de façon explicite. En effet :

$$u_n u_{n-1} \dots u_2 u_1 u_0 = q u_{n-1} q u_{n-2} \dots q u_1 q u_0 u_0$$

$$u_n \cancel{u_{n-1} \dots u_2 u_1 u_0} = q^n \cancel{u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0} u_0$$

et ainsi il reste $u_n = q^n u_0$



✎ Proposition 12

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors :

$$\square \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0,$$

$$\square \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p q^{n-p} \quad \text{qu'on peut aussi retenir avec} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{u_p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}.$$

La seconde propriété se calcule simplement par le quotient $\frac{u_n}{u_p} = \frac{q^n u_0}{q^p u_0} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}$.

5.3 Sens de variation d'une suite géométrique

Proposition 13

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ avec $q > 0$.

- si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

Proposition 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

- si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) et la suite (q^n) ont le même sens de variation.
- si $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) et la suite (q^n) ont des sens de variation contraire.

Cela se justifie tout simplement à partir de la définition d'une suite arithmétique : $u_{n+1} = qu_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

5.4 Somme des n premières puissances entières de q

Proposition 15

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad 1 + q + q^2 + \dots + q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{soit} \quad \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

 **Notation :** la somme $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ se note $\sum_{k=0}^n q^k$. Attention, $\forall q \in \mathbb{R}, q^0 = 1$.

 **Exemple :** $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = \frac{3^{11} - 1}{2} = 88\,573$.