SUITES GEOMETRIQUES

1 SENS DE VARIATION

68 Donner le sens de variations des suites suivantes.

1. $u_n = 4 \times 0{,}2^n$ 2. $v_n = -3 \times 4^n$ 3. $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = \frac{1}{5} w_n \end{cases}$

4. $t_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ 5. $k_n = \frac{(-2)^n}{10}$ 6. $\begin{cases} z_0 = 5 \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$

1 La suite $(0{,}2^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car $0 < 0{,}2 < 1$ et $4 > 0$ donc par produit la suite (u_n) est strictement décroissante.

2 La suite $(4^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante car $4 > 1$ et $-3 < 0$ donc par produit la suite (u_n) est strictement décroissante.

3 La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de 1er terme $w_0 = -2$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Or la suite $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car $0 < \frac{1}{5} < 1$ et $-2 < 0$ donc par produit la suite (w_n) est strictement croissante.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3 \times 3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}$ soit $t_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Or la suite $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car $0 < \frac{1}{3} < 1$ et $\frac{2}{3} > 0$ donc par produit la suite (w_n) est strictement décroissante.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = \frac{(-2)^n}{10} = \frac{1}{10} \times (-2)^n$

La suite (k_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de 1er terme $k_0 = \frac{1}{10}$. Cependant cette suite n'est pas monotone, elle alterne entre une valeur positive et une valeur négative : c'est une suite alternée (le signe change constamment entre deux termes successifs).

$k_0 = \frac{1}{10}$, $k_1 = -\frac{2}{10}$, $k_2 = \frac{4}{10}$, $k_3 = \frac{-8}{10}$

6 La suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de 1^{er} terme $z_0 = 5$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 5 \times 3^n$

Or la suite $(3^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante car $3 > 1$ et $5 > 0$ donc par produit la suite (z_n) est strictement croissante.

2 CALCULS DE SOMMES

ce qui suit est écrit « pour information ».

- Cas général : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0. Posons $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Alors

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$$

$$= u_0 + u_0 q^1 + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^n$$

$$= u_0 \left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right) \quad \text{et} \quad 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\boxed{S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

À savoir refaire dans des cas pratique

Avec le signe somme : pour aller plus loin (non exigible).

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

donc $S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

- Cas général avec un 1^{er} terme différent de u_0

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_p.

Posons $S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ et $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ici on remplace n par $p+1$ dans la relation $u_n = u_p q^{n-p}$.

ici on remplace n par $p+2$ dans la relation $u_n = u_p q^{n-p}$.

$u_{p+1} = u_p \times q^{p+1-p} = u_p q^1$

$u_{p+2} = u_p \times q^{p+2-p} = u_p q^2$

donc $S = u_p + u_p q^1 + u_p q^2 + u_p q^3 + \dots + u_p q^{n-p}$

$= u_p \left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-p}\right)$

$$\boxed{S = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}}$$

À savoir refaire dans des cas pratique

<u>Avec le signe somme</u> : pour aller plus loin (non exigible).

$S = \sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_p q^{k-p} = u_p \sum_{k=p}^{n} q^{k-p} = u_p \sum_{i=0}^{n-p} q^i$ en posant $i = k-p$.

Or $\sum_{i=0}^{n-p} q^i = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ donc $S = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

69 Soit la suite géométrique u de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 4$.

1. Exprimer le terme général u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Étudier le sens de variation de u.

3. Justifier l'égalité suivante :

$$u_1 + \dots + u_{10} = u_1 \times \left(1 + q + q^2 + \dots + q^9\right)$$

En déduire la valeur de cette somme.

4. De la même façon, calculer la somme suivante :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$$

1 Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_n}{u_p} = \frac{q^n}{q^p}$ soit $u_n = u_p q^{n-p}$

Ici on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$

Remarque dans cet énoncé on précise que u_1 est le 1^{er} terme, mais en fait ce n'est pas nécessaire. On aurait pu dire que cette suite a pour terme $u_1 = 4$ sans préciser que c'est le 1^{er} terme

C'est pourquoi on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$

En effet, on peut calculer $u_0 = 4 \times 2^{0-1} = 4 \times 2^{-1} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

Cependant, l'énoncé « insiste » sur le fait que u_1 est le 1er terme, c'est pourquoi ils se placent dans $\mathbb{N}^*$.

On écrit alors plutôt $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$ pour suivre ce qui indique l'énoncé.

2 Il faut revenir à ce qui est connu, c'est à dire les variations de la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 4 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{-1} \times 2^n = \frac{4}{2} \times 2^n$ soit $\boxed{u_n = 2 \times 2^n}$

Or la suite $(2^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante car $2 > 0$ et par produit avec le nombre $2 > 0$ on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

donc $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10} = u_1 + u_1 \times q^1 + u_1 \times q^2 + \dots + u_1 \times q^9$

$$= u_1 \left(1 + q + q^2 + \dots + q^9\right)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

donc $1 + q + q^2 + \dots + q^9 = \dfrac{1-q^{10}}{1-q}$ et $\boxed{u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \dfrac{1-q^{10}}{1-q} = \dfrac{q^{10}-1}{q-1}}$

<u>Application numérique</u> : $u_1 + \dots + u_9 = \dfrac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1023$

4 Changeons un peu l'énoncé, et au lieu de commencer à u_1, commençons à u_6.

pour information $u_1 + \dots + u_{20} = 4\,194\,300$

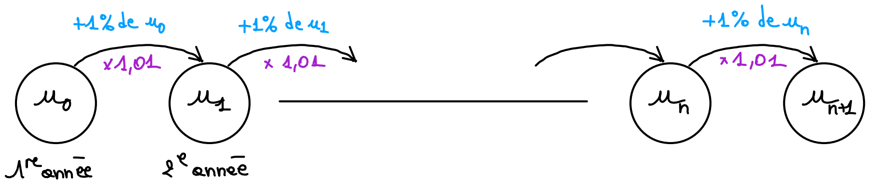
$\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p\, q^{n-p}$ donc $u_n = u_6 \times q^{n-6}$ et $u_6 = 2 \times 2^6 = 2^7 = 128$

$$u_6 + u_7 + u_8 + \dots + u_{20} = u_6 + u_6\, q^1 + u_6\, q^2 + \dots + u_6\, q^{14}$$
$$= u_6\left(1 + q + q^2 + \dots + q^9\right)$$
$$= u_6\, \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

Application numérique : $u_6 + u_7 + \dots + u_{20} = 128 \times (2^{10} - 1) = 130\,944$.

37 Une maison est louée depuis exactement 10 ans. La 1re année, le loyer mensuel s'élevait à 900 €. Puis, chaque année suivante, ce montant a augmenté de 1 %.
• Calculer la somme totale (au centime d'euro près) représentant l'ensemble des loyers au cours de ces 10 années.

Schématisation



- Une augmentation de 1% revient à multiplier par $1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$

- Une valeur V augmentée de 1% revient à être multipliée par $1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$.

  En effet, après augmentation, la valeur devient $V + \frac{1}{100} V = \left(1 + \frac{1}{100}\right) V = 1{,}01\, V$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de 1er terme $u_0 = 900$

La maison est louée pendant exactement 10 ans : u_9 correspond donc au dernier montant de loyer. Le loyer étant perçu au mois, le propriétaire reçoit donc 12 loyers par an.

$$S = 12\, u_0 + 12\, u_1 + 12\, u_2 + \dots + 12\, u_9$$
$$= 12\left(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9\right)$$
$$= 12\left(u_0 + u_0\, q + u_0\, q^2 + \dots + u_0\, q^9\right)$$
$$= 12\, u_0\left(1 + q + q^2 + \dots + q^9\right)$$
$$= 12\, u_0\, \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

Application numérique : $S = 12 \times 900 \times \dfrac{1{,}01^{10} - 1}{1{,}01 - 1} = 112\,991{,}90$ € à 10^{-2} près.

Remarque on aurait pu prendre u_1 comme 1^{er} terme. On aurait alors

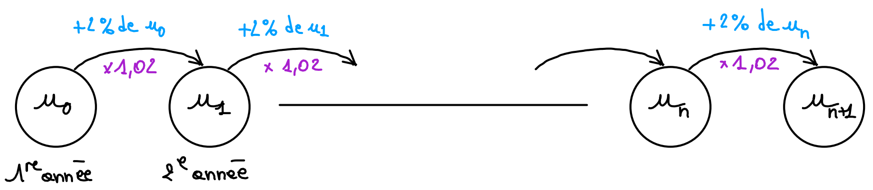
$$(u_n) : \begin{cases} u_1 = 900 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 900 \times 1{,}01^{n-1} \end{cases}$$

Ainsi le montant total sur 10 ans est :

$$S = 12u_1 + 12u_2 + 12u_3 + \dots + 12u_{10}$$
$$= 12(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}) \qquad \text{et} \qquad u_n = u_1 q^{n-1}$$
$$= 12\left(u_1 + u_1 q^1 + u_1 q^2 + \dots + u_1 q^9\right)$$
$$= 12\, u_1 \left(1 + q^1 + q^2 + \dots + q^9\right)$$
$$S = 12\, u_1 \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 12\, u_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12 \times 900 \times \frac{1{,}01^{10} - 1}{1{,}01 - 1} = 112\,991{,}90 \text{ € à } 10^{-2} \text{ près.}$$

25 Le salaire annuel d'embauche d'un employé est de 20 000 €. Son contrat prévoit une augmentation annuelle de 2 %.
On note : $u_0 = 20\,000$ et, pour tout $n \geqslant 1$, u_n le salaire annuel au bout de n années.
a. Déterminer u_1 et u_2.
b. Déterminer le lien entre u_{n+1} et u_n. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
c. Exprimer u_n en fonction de n.
d. Si l'employé reste dans la même entreprise pendant 10 ans, déterminer son salaire annuel au bout de la dixième année.

Schématisation



$u_0 = 20000$

a Le salaire courant est augmenté de 2% l'année suivante. Ainsi :

$$u_1 = u_0 + \frac{2}{100} \times u_0 = 1{+}0{,}02\; u_0 = 1{,}02\, u_0 = 20\,400 \text{ €}$$

$$u_2 = u_1 + \frac{2}{100}\, u_1 = 1{,}02\, u_1 = 20\,808 \text{ €}$$

b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100} u_n = 1{,}02\, u_n$

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de 1^{er} terme $u_0 = 20000$

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 20\,000 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1{,}02\, u_n \end{cases}$$

c Il s'agit ici d'indiquer une formule explicite.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0\, q^n \quad \text{soit} \quad u_n = 20\,000 \times 1{,}02^n$$

d L'employé reste dans l'entreprise pendant 10 ans, sachant que u_n est le salaire annuel au bout de n années (c'est dans l'énoncé).

Il s'agit donc de calculer u_{10} (attention, ce n'est pas u_9).

Il démarre à $u_0 = 20000$, mais au bout d'un an, il atteint $u_1 = 20000 \times 1{,}02$
de deux ans, $u_2 = 20000 \times 1{,}02^2$
etc.

Pour ne pas faire d'erreur, se référer scrupuleusement à ce qui indique l'énoncé.

Application numérique : $u_{10} = 20\,000 \times 1{,}02^{10} = 24379{,}89$ € au centime près.

122 Modéliser chaque situation par une suite en précisant sa nature (arithmétique, géométrique, ni l'une ni l'autre), puis résoudre le problème posé.
Situation 1 : on étudie l'action d'un antibiotique sur une souche de bactéries. Chaque heure, 5 % des bactéries sont tuées.
Quelle est la durée nécessaire pour que la moitié des bactéries initialement présentes soient tuées par cet antibiotique ?
Situation 2 : Léa dispose dès sa naissance d'une tirelire contenant 100 €. À son premier anniversaire, ses grands-parents y déposent 50 €, et chaque année, ils augmentent la somme déposée de 10 €.
En supposant que Léa n'effectue aucun retrait dans sa tirelire, quel sera son montant à sa majorité ?
Situation 3 : une épidémie a atteint 10 200 personnes. On estime que le nombre de personnes atteintes augmente quotidiennement de 8 % durant les dix premiers jours.
Estimer alors le nombre de personnes qui seront atteintes après ces dix jours.

Situation 1

Soit u_n le nombre de bactéries restantes au bout de n heures.

Chaque heure 5 % sont tuées et il en reste donc 95 %.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}95\, u_n \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de 1er terme u_0.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times 0{,}95^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on cherche à déterminer n pour que $u_n \leqslant \frac{u_0}{2}$

le nb de bactéries au bout de n heures est inférieur à la moitié de ce qu'il y avait au départ.

Or $\quad u_n \leqslant \frac{u_0}{2} \iff \cancel{u_0} \times 0{,}95^n \leqslant \frac{\cancel{u_0}}{2}$

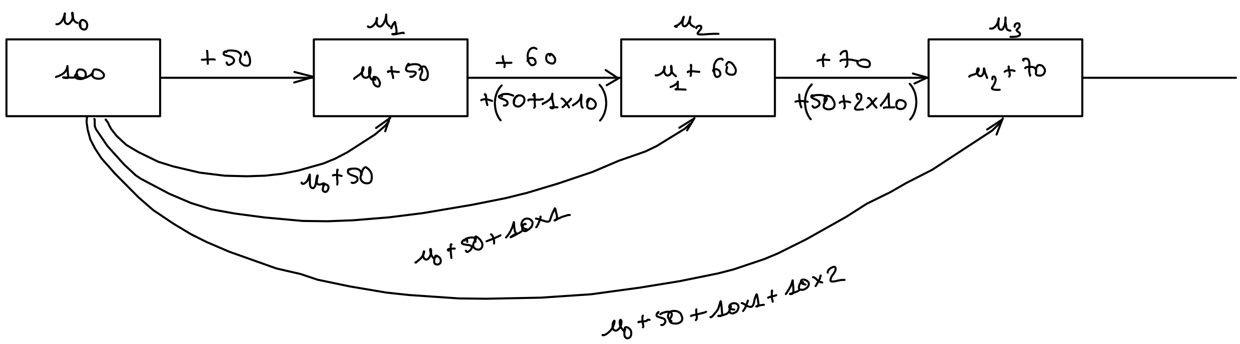
$$\iff 0{,}95^n \leqslant 0{,}5$$

TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1)
nMin=0
u(n)=0.95^n

n	u(n)
0	1
1	0.95
2	0.9025
3	0.8574
4	0.8145
5	0.7738
6	0.7351
7	0.6983
8	0.6634
9	0.6302
10	0.5987
11	0.5688
12	0.5404
13	0.5133
14	0.4877
15	0.4633

À l'aide de la calculatrice, on détermine que la durée nécessaire pour qu'au moins la moitié des bactéries soit éliminée est de 14 h.

grands-parents y déposent 50 €, et chaque année, ils augmentent la somme déposée de 10 €.
En supposant que Léa n'effectue aucun retrait dans sa tirelire, quel sera son montant à sa majorité ?



$u_1 = u_0 + 50 = u_0 + (50 + 10 \times 0)$

$u_2 = u_1 + 60 = u_1 + (50 + 10) = u_0 + (50 + 10 \times 0) + (50 + 10 \times 1)$

$u_3 = u_2 + 70 = u_2 + (50 + 2 \times 10) = u_0 + (50 + 10 \times 0) + (50 + 10 \times 1) + (50 + 10 \times 2)$

$u_n = u_0 + \underbrace{(50 + 10 \times 0)}_{1^{er}\ anniv} + \underbrace{(50 + 10 \times 1)}_{2^{e}\ anniv.} + \underbrace{(50 + 10 \times 2)}_{3^{e}\ anniv.} + \_\_\_\_ + \underbrace{(50 + 10 \times (n-1))}_{n^{e}\ anniv.}$

$u_0 = 100$

c'est la somme cumulée.

$$S = 100 + (50 + 10 \times 0) + (50 + 10 \times 1) + \ldots + (50 + 10 \times 17)$$

$$= 100 + 50 \times 18 + 10\,(1 + 2 + \ldots + 17)$$

$$= 1000 + 10 \times \frac{1}{2} \times 17 \times 18$$

$$= 2530$$

donc Léa disposera de 2530 € à sa majorité.

Situation 3 : une épidémie a atteint 10 200 personnes. On estime que le nombre de personnes atteintes augmente quotidiennement de 8 % durant les dix premiers jours.
Estimer alors le nombre de personnes qui seront atteintes après ces dix jours.

Posons u_n le nombre de personnes infectées au bout de n jours.

Cette population infectée augmente de 8 % par jour, ce qui correspond à une multiplication par 1,08.

La suite u_n est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}08$ et de 1er terme $u_0 = 10200$.

$$\boxed{u_n : \begin{cases} u_0 = 10\,200 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1{,}08\, u_n \end{cases}}$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\, q^n = 10\,200 \times 1{,}08^n}$

On sous-entend que les personnes infectées ne guérissent pas, au moins pendant les 10 premiers jours.

On note S le nombre de personnes infectées au bout de n jours

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0 q^n$$

$$= u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^n$$

$$= u_0 \left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right)$$

$$\boxed{S = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}$$

Au bout de 10 jours on aura donc $S = 10200 \dfrac{1{,}08^{11} - 1}{1{,}08 - 1}$

Soit $S = 169784$ à l'unité près.

119 Calculer les sommes suivantes composées de termes consécutifs de suites géométriques.

1. $S_1 = 32 + 64 + 128 + \dots + 131072$
2. $S_2 = 2 - 6 + 18 - 54 + \dots + 118\,098$
3. $S_3 = 3 + 5 + \dfrac{25}{3} + \dfrac{125}{9} + \dots + \dfrac{390\,625}{2187}$
4. $S_4 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{8}{75} + \dots + \dfrac{2^{n+1}}{3 \times 5^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1

$$S_1 = 32 + 64 + 128 + \dots + 131072$$

$$= 32 + 32 \times 2 + 32 \times 4 + \dots + 32 \times 4096$$

$$= 32 + 32 \times 2^1 + 32 \times 2^2 + \dots + 32 \times 2^{12}$$

$$= 32 \left(1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12}\right)$$

$$= 32 \times \frac{2^{13} - 1}{2 - 1}$$

$$= 32 \left(2^{13} - 1\right)$$

$$S_1 = 262112$$

2

$$S_2 = 2 - 6 + 18 - 54 + \dots + 118098$$

$$= 2 - 2 \times 3 + 2 \times 9 - 2 \times 27 + \dots + 2 \times 59049$$

$$= 2 + 2 \times (-3) + 2 \times (-3)^2 + 2 \times (-3)^3 + \dots + 2 \times (-3)^{10}$$

$$= 2\left(1 + (-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{10}\right)$$

$$= 2\ \frac{1-(-3)^{11}}{1-(-3)} = 2\ \frac{1+3^{11}}{4} = \frac{1}{2}\left(1+3^{11}\right) = 88574$$

3

$$S_3 = 3 + 5 + \frac{25}{3} + \frac{125}{9} + \dots + \frac{390625}{2187}$$

$$= 3 + 3\times\frac{5}{3} + 3\times\frac{25}{3\times 3} + 3\times\frac{125}{3\times 9} + \dots + 3\times\frac{390625}{3\times 2187}$$

$$= 3 + 3\times\left(\frac{5}{3}\right)^1 + 3\times\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 3\times\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \dots + 3\times\left(\frac{5}{3}\right)^8$$

$$= 3\left(1 + \left(\frac{5}{3}\right)^1 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{5}{3}\right)^8\right)$$

$$= 3 \times \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^9 - 1}{\frac{5}{3} - 1}$$

$$= \frac{9}{4}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^9 - 1\right)$$

$$S_3 = \frac{966721}{2187}$$

4

$$S_4 = \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{8}{75} + \dots + \frac{2^{n+1}}{3\times 5^n}$$

on se doute que $\frac{2}{3}$ est le 1^{er} terme, c'est pourquoi on factorise par $\frac{2}{3}$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\times\frac{4}{15} + \frac{3}{2}\times\frac{8}{75} + \dots + \frac{3}{2}\times\frac{2^{n+1}}{3\times 5^n}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\times\frac{4}{15} + \frac{3}{2}\times\frac{8}{75} + \dots + \frac{2^n}{5^n}\right)$$

$\frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ donc on se doute que la raison est $\frac{2}{5}$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}$$

$$S_4 = \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$