

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 5 \\ u_2 = 17 \end{cases} \quad \text{et on constate que } u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}.$$

La suite (u_n) n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 2 + 1 = 3u_n + 3 = 3(u_n + 1) \quad \text{et} \quad u_n + 1 = v_n$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n}$ ce qui montre que (v_n) est une suite géométrique.

NB On aurait pu calculer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ mais c'est beaucoup moins intéressant que la méthode précédente avec la factorisation, car avec le quotient il faut justifier que v_n ne s'annule pas !

Par ailleurs $v_0 = u_0 + 1 = 2$ donc

$$(v_n): \begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \times 3^n}$ et comme $v_n = u_n + 1$ on a

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - 1 = 2 \times 3^n - 1}$