2. $B = (\exp(x))^2 \times \exp(-2x+1)$

1 $A = \exp(3x) \times \exp(-6x+1)$

$A = \exp(-3x+1)$

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

2 $B = (\exp(x))^2 \times \exp(-2x+1)$

$= \exp(2x) \times \exp(-2x+1)$

$= \exp(1)$

$B = e \quad (\approx 2{,}718)$.

38 1. $A = \dfrac{\exp(2x+6)}{\exp(-3x+1)}$

2. $B = \dfrac{\exp(x^2+1)}{\exp(x(x+1))}$

$A = \dfrac{\exp(2x+6)}{\exp(-3x+1)} = \exp\left((2x+6)-(-3x+1)\right)$

d'où $A = \exp(5x+5) = \exp(5(x+1)) = (\exp(x+1))^5$

$B = \dfrac{\exp(x^2+1)}{\exp(x(x+1))} = \exp\left(x^2+1-(x^2+x)\right) = \exp(1-x)$

39 1. $A = \dfrac{4}{\exp(-2x)}$

2. $B = \dfrac{1-\exp(2x)}{1+\exp(x)}$

$A = \dfrac{4}{\exp(-2x)} = 4\exp(2x) = 2^2 \times (\exp(x))^2 = (2\exp(x))^2$

En effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \times e^{-x} = 1$ ssi $\dfrac{1}{e^{-x}} = e^x$

$B = \dfrac{1-\exp(2x)}{1+\exp(x)} = \dfrac{1^2-(\exp(x))^2}{1+\exp(x)} = \dfrac{(1-\exp(x))(1+\exp(x))}{1+\exp(x)} = 1-\exp(x)$.

47 Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = 10e^x - 5xe^x$
2. $B = 2xe^{-x} + 3e^{-x}$
3. $C = e^{2x} - 4e^x$
4. $D = -3xe^{0{,}4x} - 2e^{0{,}4x}$

1 $A = 10e^x - 5xe^x$

$A = 5e^x(2-x)$

2 $B = 2x e^{-x} + 3 e^{-x} = e^{-x}(2x+3)$

3 $C = e^{2x} - 4e^{x} = (e^{x})^2 - 4e^{x} = e^{x}(e^{x}-4)$

4 $D = -3x e^{0,4x} - 2 e^{0,4x} = -e^{0,4x}(3x+2)$

43 Développer et simplifier les expressions suivantes.

1. $A = e^{x}(e^{x}+5)$
2. $B = e^{-x}(e^{x}-2)$
3. $C = e^{2x}(e^{x}-e^{-x})$

1 $A = e^{x}(e^{x}+5) = (e^{x})^2 + 5e^{x} = e^{2x} + 5e^{x}$

2 $B = e^{-x}(e^{x}-2) = e^{-x+x} - 2e^{-x} = e^{0} - \frac{2}{e^{x}} = 1 - \frac{2}{e^{x}} = \frac{e^{x}-2}{e^{x}}$

3 $C = e^{2x}(e^{x} - e^{-x}) = e^{2x} \times e^{x} - e^{2x} \times e^{-x} = e^{3x} - e^{x}$

64 1. $f(x) = e^{x} + 4x$ 2. $f(x) = e^{x} - 5x$
3. $f(x) = e^{x} + x^2$ 4. $f(x) = 3x^2 - e^{x}$

65 1. $f(x) = e^{2x} + 4$ 2. $f(x) = e^{-x} + 1$
3. $f(x) = e^{4x} + 2x - 1$ 4. $f(x) = 7 - e^{-3x}$

66 1. $f(x) = xe^{x}$ 2. $f(x) = x^2 e^{x}$
3. $f(x) = \frac{e^{x}}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ 4. $f(x) = \frac{x}{e^{x}}$

67 1. $f(x) = e^{2x+1}$ 2. $f(x) = 2e^{-4x-1}$
3. $f(x) = -2e^{-3x+8}$ 4. $f(x) = 3e^{5x-5}$

64
- $f(x) = e^{x} + 4x$ $\quad f'(x) = e^{x} + 4$
- $f(x) = e^{x} - 5x$ $\quad f'(x) = e^{x} - 5$
- $f(x) = e^{x} + x^2$ $\quad f'(x) = e^{x} + 2x$
- $f(x) = 3x^2 - e^{x}$ $\quad f'(x) = 6x - e^{x}$

65
- $f(x) = e^{2x} + 4$ $\quad f'(x) = 2e^{2x}$ car $(e^{kx})' = k\,e^{kx}$

NB $(e^{mx+p})' = (e^{mx} \times e^{p})' = e^{p} \times (e^{mx})' = e^{p} \times m\,e^{mx} = m\,e^{mx+p}$

$$((v \circ u)(x))' = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x))$$

- $f(x) = e^{4x} + 2x + 1$ $\quad f'(x) = 4e^{4x} + 2 = 2(2e^{4x}+1)$

66 • $f(x) = x \times e^{x}$ $\quad f'(x) = 1 \times e^{x} + e^{x} \times x = e^{x}(1+x)$

• $f(x) = x^{2} \times e^{x}$ $\quad f'(x) = 2x\, e^{x} + e^{x} \times x^{2} = x e^{x}(x+2)$

• $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{e^{x} \times x - 1 \times e^{x}}{x^{2}} = \dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}$

• $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1 \times e^{x} - e^{x} \times x}{(e^{x})^{2}} = \dfrac{e^{x}(1-x)}{(e^{x})^{2}} = \dfrac{1-x}{e^{x}}$

67 • $f(x) = e^{2x+1}$ $\quad f'(x) = 2\, e^{2x+1}$

• $f(x) = 2 e^{-4x-1}$ $\quad f'(x) = -8\, e^{-4x-1}$

• $f(x) = -2\, e^{-3x+8}$ $\quad f'(x) = 6\, e^{-3x+8}$

• $f(x) = 3 e^{5x-5}$ $\quad f'(x) = 15\, e^{5x-5}$

78 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4e^{x} - 6x$$

p. 193

1. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que :

$$f'(x) = 2(e^{x} - 1)(e^{x} + 3)$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

1 • Domaine de définition

f est définie sur $\mathbb{R}$ par somme de fonction définies sur $\mathbb{R}$

• Domaine de dérivabilité

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

NB $x \longmapsto e^{x}$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc aussi pour $2x$.

• Détermination de $f'(x)$ $\quad f(x) = e^{2x} + 4e^{x} - 6x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 2e^{2x} + 4e^{x} - 6 = 2\left(e^{2x} + 2e^{x} - 3\right)$

ou encore $\quad f'(x) = 2\left((e^{x})^{2} + 2(e^{x}) - 3\right)$

On reconnaît une fonction polynômiale du second degré d'inconnue e^x.

On remarque que $e^0 = 1$ est une racine de ce polynôme, en effet : $1^2 + 2 - 3 = 0$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)^2 + 2(e^x) - 3 = (e^x - 1)(e^x + d)$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $-1 \times d = -3$ d'où $d = 3$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 3)}$

- <u>Signe de $f'(x)$ et variations de f</u>

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(e^x + 3) > 6$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $e^x - 1$. Or :

$e^x - 1 \geqslant 0$ ssi $e^x \geqslant 1$ ssi $e^x \geqslant e^0$ ssi $x \geqslant 0$ avec égalité pour $x = 0$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

$f(0) = 5$

Pour les exercices **69** à **71**, étudier le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

69 **1.** $f(x) = (x-3)e^x$
2. $f(x) = (-4x+5)e^{-x}$
3. $f(x) = (x+4)e^{2x}$
4. $f(x) = (x^2+x-6)e^x$

70 **1.** $f(x) = (2x+5)(e^x+3)$
2. $f(x) = (-3x+1)(2e^x+1)$
3. $f(x) = (x+7)(e^x-1)$

71 **1.** $f(x) = 4xe^x - e^x$
2. $f(x) = -3e^x - 2xe^x$
3. $f(x) = 7xe^{-x} - 2e^{-x}$
4. $f(x) = xe^{2x} + 5e^{2x}$

69

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et donc

$f(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 3$ avec égalité si $x = 3$

$f(x) < 0$ ssi $x < 3$.

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et donc

par quotient $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} > 0$.

Le signe de $f(x)$ dépend du signe de $-4x+5$, d'où :

$f(x) \geq 0$ ssi $x \leq \frac{5}{4}$ avec égalité pour $x = \frac{5}{4}$

$f(x) < 0$ ssi $x > \frac{5}{4}$.

3 $f(x) = (x+4)e^{2x}$.

$\forall X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$ et donc en posant $X = 2x$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4 $f(x) = (x^2+x-6)e^x$

Le signe de $f(x)$ dépend du signe de x^2+x-6 puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

La fonction $x \longmapsto x^2+x-6$ est une fonction polynomiale du second degré, et elle admet 2 comme racine. En effet : $2^2+2-6 = 0$.

Ainsi, il existe $d \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x-6 = (x-2)(x+d)$ et on a $-2 \times d = -6$ soit $d = 3$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)(x+3)e^x$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

70

1 $f(x) = (2x+5)(e^x+3)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + 3 > 3$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2 $f(x)=(-3x+1)(2e^x+1)$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x+1 > 1$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3 $f(x)=(x+7)(e^x-1)$

Pour tout réel x

- $x+7 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -7$ avec égalité pour $x=-7$
- $e^x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ avec égalité pour $x=0$.
- On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-7		0		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

71

1 $f(x)=4xe^x-e^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(4x-1)$ d'où

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2 $f(x)=-3e^x-2xe^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=-e^x(3+2x)$ d'où

Attention à ce signe

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3 $f(x)=7xe^{-x}-2e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}(7x-2)$ d'où

x	$-\infty$		$2/7$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

car $e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0$.

4 $f(x)=xe^{2x}+5e^{2x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x+5)$ d'où

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

car $e^{2x}=(e^x)^2>0$.

49 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{1,25n}$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{1,25\,n} = \left(e^{1,25}\right)^n = q^n$ en posant $q = e^{1,25}$

Ainsi la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{1,25}$ et de 1^{er} terme $u_0 = 1$.

50 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 4130e^{-0,85n}$.
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.

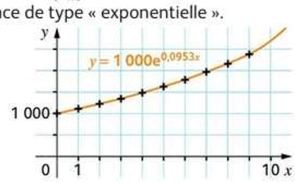
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4130\, e^{-0,85\,n} = 4130\left(e^{-0,85}\right)^n$.

$(v_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-0,85}$ et de 1^{er} terme $v_0 = 4130$.

51 On estime qu'une population de bactéries, composée initialement de 1 000 unités, augmente chaque semaine de 10 %.

1. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de bactéries au bout de n semaines d'évolution. Déterminer le nombre de bactéries au bout d'une semaine, de deux semaines, de trois semaines, puis de n semaines d'évolution.

2. À l'aide d'un tableur, on a représenté graphiquement la suite (u_n) et on l'a ajustée par une courbe de tendance de type « exponentielle ».



On pose $f(t) = 1000 \times e^{0,0953t}$ pour $t \geqslant 0$.

a. Pour tout réel $t \geqslant 0$, simplifier le quotient $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}$. Mettre en relation avec la suite (u_n).

b. Calculer $f\left(2+\dfrac{1}{7}\right)$. Interpréter le résultat obtenu.

c. Pour tout réel $t \geqslant 0$, simplifier $\dfrac{f\left(t+\frac{1}{7}\right)}{f(t)}$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

1 La population de bactéries augmente de 10 % chaque semaine ce qui correspond à une multiplication par 1,1.

$$(u_n)_{\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 1000 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1,1\, u_n \end{cases}$$

$(u_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de 1^{er} terme $u_0 = 1000$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1000 \times 1,1^n$$

2a Posons $\alpha = 0,0953$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\dfrac{f(t+1)}{f(t)} = \dfrac{\cancel{1000}\, e^{\alpha(t+1)}}{\cancel{1000}\, e^{\alpha t}} = \dfrac{\cancel{e^{\alpha t}} \times e^{\alpha}}{\cancel{e^{\alpha t}}}$

soit $f(t+1) = e^{\alpha} f(t)$ et $e^{\alpha} = e^{0,0953} = 1,1000$ à 10^{-4} près.

On constate donc que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t+1) = 1,1\, f(t)$ à 10^{-4} près.

ce qui rappelle la relation de récurrence qui définie la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$

On peut considérer que f est le "prolongement" de (u_n) dans $\mathbb{R}_+$.

On aurait pu aussi remarquer que : $f(t) = 1000 \times e^{\alpha t} = 1000 \times (e^{\alpha})^t = 1000 \times 1{,}1^t$

ce qui rappelle la forme explicite de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

2b $f\left(2+\frac{1}{7}\right) = 1000 \times e^{\alpha\left(2+\frac{1}{7}\right)} = 1000\, e^{2\alpha} \times e^{\alpha/7}$ et $1000\, e^{2\alpha} = f(2)$

donc $f\left(2+\frac{1}{7}\right) = f(2)\, e^{\alpha/7}$

De façon plus générale : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f\left(t+\frac{1}{7}\right) = 1000\, e^{\alpha\left(t+\frac{1}{7}\right)}$

soit $\boxed{f\left(t+\frac{1}{7}\right) = f(t) \times e^{\alpha/7}}$

- Entre t et $t+1$ il y a un écart d'une semaine.
- Entre t et $t+\frac{1}{7}$ il y a un écart de un jour.

Ici $f\left(2+\frac{1}{7}\right)$ correspond à la quantité de bactéries au bout de deux semaine et un jour.

2c $$\frac{f\left(t+\frac{1}{7}\right)}{f(t)} = e^{\alpha/7} = 1{,}0137 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

C'est le coefficient multiplicateur qui permet de calculer la quantité de bactéries quotidiennement (jour après jour).

53 Le livret A est un compte épargne exonéré d'impôts et de cotisations sociales. Au 1er janvier 2019, le taux d'intérêts était de 0,75 % par an. Les intérêts sont ajoutés au capital placé à la fin de chaque année et produisent des intérêts les années suivantes. On étudie le comportement d'un compte livret A « en sommeil », sur lequel on place le 1er janvier 2019 la somme de 5 000 €, puis sur lequel on n'ajoute ni ne retire aucun capital.

On suppose également que le taux d'intérêt de 0,75 % par an reste inchangé à l'avenir.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n), où u_n est le capital disponible au bout de n années de placement ?

2. Un tableur a permis d'ajuster la suite (u_n) par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x) = 5000 \times e^{0{,}0075x}$

a. À la calculatrice, construire le tableau de valeurs de la fonction f sur $[0;10]$ avec un pas de 1.

b. Comparer avec les valeurs obtenues à la question **1**.

c. Soit un réel $t \geqslant 0$. Simplifier $\frac{f(t+1)}{f(t)}$. Interpréter.

d. Un livret A est plafonné à 22 950 €. En quelle année atteindra-t-on ce plafond ?

p192.

1 Le capital augmente de 0,75 % chaque année, ce qui revient à une multiplication par 1,0075. On a :

$$(u_n)_{\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 5000 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1{,}0075\, u_n \end{cases}$$

C'est une suite géométrique de raison $q = 1{,}0075$ et de 1er terme $u_0 = 5000$.

On peut donc écrire que $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = 5000 \times 1{,}0075^n$

2a

n	$u(n)$
0.000	5000.0
1.000	5037.5
2.000	5075.3
3.000	5113.3
4.000	5151.7
5.000	5190.3
6.000	5229.3

Valeurs générées par la suite (u_n)

X	Y1
0.000	5000.0
1.000	5037.6
2.000	5075.6
3.000	5113.8
4.000	5152.3
5.000	5191.1
6.000	5230.1

Valeurs générées par la fonction f.

2b On constate que les valeurs sont assez proches : on peut approcher les valeurs de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ avec les valeurs générées par la fonction f.

NB $f(x) = 5000 \times e^{0{,}0075\,x} = 5000 \times \left(e^{0{,}0075}\right)^x$ et $e^{0{,}0075} = 1{,}0075$ à 10^{-4} près.

d'où $f(x) = 5000 \times 1{,}0075^x$ à 10^{-4} près.

On reconnaît la formule explicite de la suite (u_n) : $u_n = 5000 \times 1{,}0075^n$.

2c $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) = 5000\, e^{\alpha(t+1)}$ en posant $\alpha = 0{,}0075$.

$f(t+1) = 5000\, e^{\alpha t}\, e^{\alpha} = f(t)\, e^{\alpha}$

d'où $f(t+1) = 1{,}0075\, f(t)$ à 10^{-4} près.

Il s'agit du coefficient multiplicateur annuel.

2d Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) > 22\,950$ ssi $5000 \times 1{,}0075^t > 22\,950$

ssi $1{,}0075^t > 4{,}59$

Y1=1.0075^X

CONFIG TABLE
DébutTbl=0
ΔTbl=20

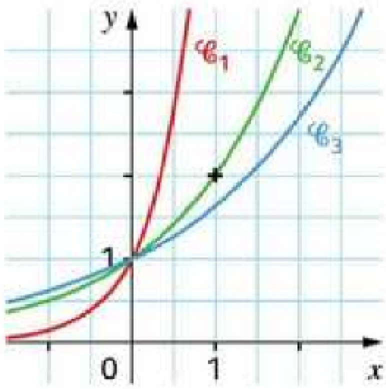
X	Y1
40	1.3483
60	1.5657
80	1.818
100	2.1111
120	2.4514
140	2.8465
160	3.3053
180	3.838
200	4.4567
220	5.175
240	6.0092

CONFIG TABLE
DébutTbl=200
ΔTbl=1

X	Y1
200	4.4567
201	4.4901
202	4.5238
203	4.5577
204	4.5919
205	4.6263
206	4.661
207	4.696
208	4.7312
209	4.7667
210	4.8024

Le seuil est donc dépassé au bout de 204 ans.

55 On considère trois nombres réels k_1, k_2 et k_3 et les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = e^{k_1 x}$, $f_2(x) = e^{k_2 x}$ et $f_3(x) = e^{k_3 x}$.
On note respectivement $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ leurs courbes représentatives.



1. On donne : $e^{0,7} \approx 2$. En déduire une valeur possible de k_2.
2. Comparer les réels k_1, k_2 et k_3.

1 Graphiquement on lit que $f_2(1) = 2$ soit $e^{k_2} = 2$.
Or on sait que $e^{0,7} \approx 2$ d'où $e^{k_2} \approx e^{0,7}$ et ainsi $k_2 \approx 0,7$.

2 On a $k_1 > k_2 > k_3$

79 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$.
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que :
$$f'(x) = \frac{-x-1}{e^x}$$
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
a. Justifier que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est horizontale.
b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1 Les fonctions $x \longmapsto x+2$ et $x \longmapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (il ne s'annule donc pas).

Par quotient, f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = e^x$.

u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) \neq 0$ donc par quotient f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2a Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{avec} \quad u(x) = x+2 \quad \text{et} \quad v(x) = e^x$$

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x$$

d'où $f'(x) = \dfrac{e^x - (x+2)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{\cancel{e^x}(-x-1)}{(e^x)^{\cancel{2}}}$

soit $f'(x) = \dfrac{-x-1}{e^x} = -\dfrac{x+1}{e^x}$

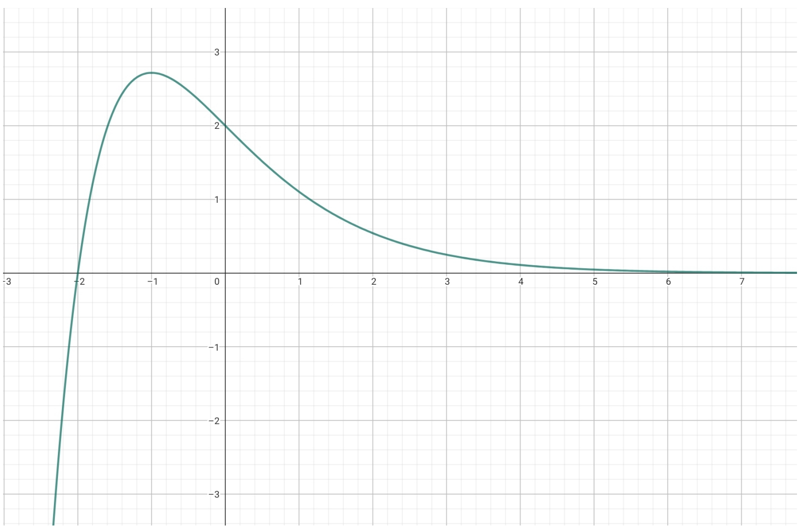
2b <u>Etude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$</u>

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x-1 \geqslant 0$ ssi $x \leqslant -1$ avec égalité pour $x = -1$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

$f(-1) = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$

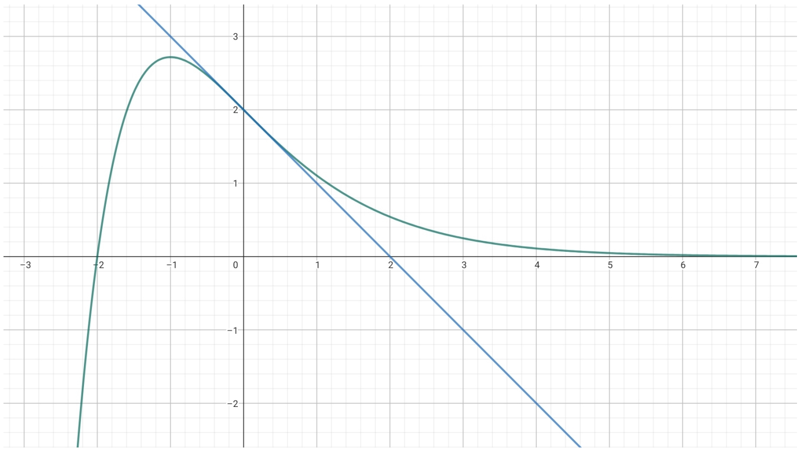


On a $f'(-1)=0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en -1.

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Donc en 0 l'équation est $y = f'(0)\,x + f(0)$

soit $y = -x + 2$



80 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. L'équation $f(x)=1$ admet-elle des solutions ?

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

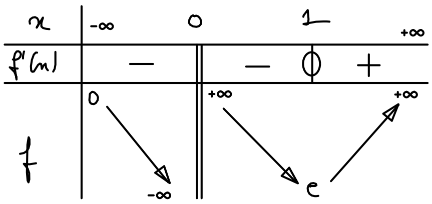
u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $v(x) = 0$ pour $x = 0$.

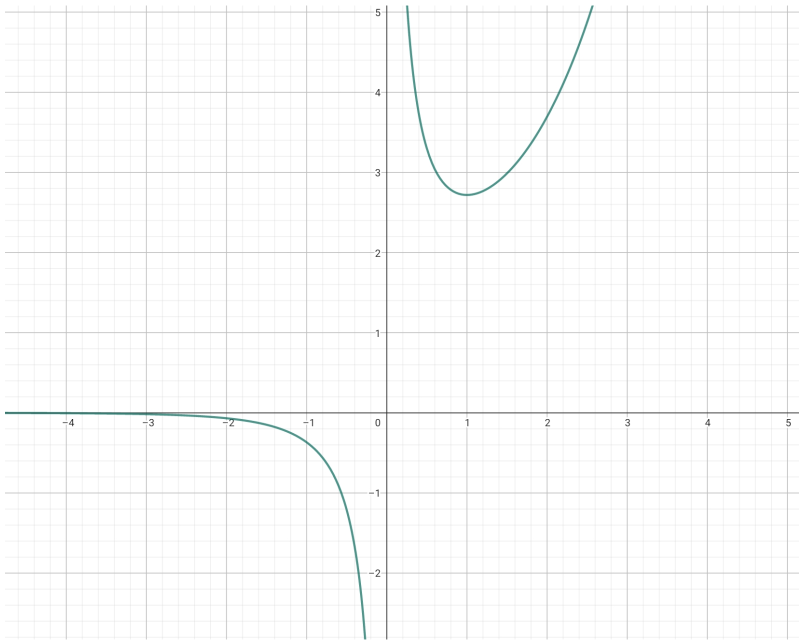
Donc par quotient, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

Donc $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $x-1$. On en déduit le tableau suivant :





Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \geq e$ donc l'équation $f(x)=1$ n'admet pas de solution sur $]0;+\infty[$.

88 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $4e^{-x}+7xe^{-x}=0$ 2. $e^{2x}+1=-2e^{x}$
3. $(3x-5)(e^{x}+2)=0$

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $4e^{-x}+7xe^{-x}=0$ ssi $e^{-x}(4+7x)=0$ ssi $x=-\frac{4}{7}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x}\neq 0$

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x}+1=-2e^{x}$ ssi $e^{2x}+2e^{x}+1=0$ ssi $(e^{x})^2+2e^{x}+1=0$ ssi $(e^{x}+1)^2=0$

ssi $e^{x}=-1$

Il n'y a donc pas de solution puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x}>0$.

3 $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x-5\ e^{x}+2=0$ ssi $3x-5=0$ ou $e^{x}+2=0$

ssi $3x-5=0$ car $e^{x}+2>2$

ssi $x=\frac{5}{3}$

89 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $\frac{-4x+1}{e^{x}}=0$ 2. $\frac{e^{x}-1}{e^{x}+7}=0$ 3. $\frac{5e^{x}-3}{e^{x}+1}=1$

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-4x+1}{e^x} = 0$ ssi $-4x+1=0$ ssi $x = \dfrac{1}{4}$

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 7} = 0$ ssi $e^x - 1 = 0$ ssi $e^x = 1 = e^0$ ssi $x = 0$

3 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{5e^x - 3}{e^x + 1} = 1$ ssi $5e^x - 3 = e^x + 1$ ssi $4e^x = 4$ ssi $e^x = 1 = e^0$ ssi $x=0$

90 On considère l'équation $(E)\ e^{2x} + 2e^x - 3$.
1. Pour tout réel x, on pose $X = e^x$.
Montrer que si x est solution de (E) alors X est solution de l'équation $(E')\ X^2 + 2X - 3 = 0$.
2. Résoudre l'équation (E') d'inconnue X.
3. En déduire les solutions de (E) d'inconnue x.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} + 2e^2 - 3 = 0$ ssi $(e^2)^2 + 2e^x - 3 = 0$

Posons $X = e^x$, l'équation devient $X^2 + 2X - 3 = 0$ et les solutions de cette équation doivent remplir la condition $X > 0$.

Cette équation admet 1 pour racine évidente et après calcul on a donc

$$\begin{cases} X^2 + 2X - 3 = 0 \\ X > 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} (X-1)(X+3) = 0 \\ X > 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} X = 1 \text{ ou } X = -3 \\ X > 0 \end{cases} \text{ ssi } X = 1$$

On a alors $e^x = 1$ soit $x = 0$ et l'unique solution de l'équation est $x=0$.