Chapitre 8 : La fonction exponentielle

1 Définition et propriétés algébriques de la fonction exponentielle

1.1 Définition et propriétés algébriques

Définition - proposition 1

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est nommée fonction exponentielle, et on la note $\exp : x \mapsto \exp(x)$.

Cette définition de la fonction exponentielle est obtenue à partir d'une équation différentielle (une équation qui lie une fonction avec ses dérivées successives), mais il existe encore d'autres manières de définir cette fonction (point culture ci-après).

Proposition 2

Pour tous réel x et y, et pour tout entier relatif n :

- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $(\exp(x))^n = \exp(nx)$
- $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Point culture : on trouve ici une deuxième façon de définir la fonction exponentielle, en s'appuyant sur une équation « fonctionnelle ». Il s'agit en fait d'une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ qui transforme une somme en un produit, ou en d'autres termes, vérifiant pour tous réels x et y l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, avec $f(0) = 1$.

1.2 Notation e

Définition 3

On note $\mathrm{e} = \exp(1)$. On nomme cette constante le nombre d'Euler (qui posa cette notation) ou constante de Néper.

Point culture :

15 avril 1707 - 18 septembre 1783

Biographie de Leonhard Euler :
http://www.breves-de-maths.fr/leonhard-euler-plus-grand-mathematicien-de-tous-les-temps/

1550 - 4 avril 1617

Biographie de John Napier :
https://www.greelane.com/fr/sciences-humaines/histoire-et-culture/john-napier-biography-4077399/

Histoire des logarithmes : https://leseditionsdeschavonnes.com/2016/03/01/breve-histoire-des-logarithmes/

Remarque : il n'est pas inutile de savoir que $\mathrm{e} \approx 2{,}718$. Comme le nombre π, la constante d'Euler est un nombre « transcendant » (il n'y a aucun polynôme P à coefficients entiers qui vérifie $P(\mathrm{e}) = 0$).

On applique alors cette notation aux propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

Proposition 4

Pour tous réel x et y, et pour tout entier relatif n :

- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$
- $\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x = 1$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$

Remarque : cela n'est pas sans rappeler les propriétés déjà connues sur les puissances. Soient deux nombres réels non nuls a et b, et deux nombres entiers n et p. On a :

(1) $a^0 = 1$ (2) $a^1 = a$ (3) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ (4) $\left(a^n\right)^p = a^{np}$ (5) $a^{-n} = \left(a^n\right)^{-1} = \dfrac{1}{a^n}$

(6) $a^n \times a^p = a^{n+p}$ (7) $\dfrac{a^n}{a^p} = a^n \times \dfrac{1}{a^p} = a^n \times a^{-p} = a^{n-p}$ (8) $\left(ab\right)^n = a^n \times b^n$ (9) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

1.3 Lien avec les suites géométriques

En fait, la fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ peut être vue comme faisant partie d'une famille plus large : les fonctions exponentielles de base q qu'on note $x \mapsto q^x$ (avec q un réel strictement positif). Ainsi, la fonction exponentielle n'est autre que la fonction exponentielle de base $\mathrm{e} \approx 2{,}718$, qui est la seule fonction exponentielle vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tous réels x. Enfin, ces fonctions exponentielles peuvent elles-mêmes être intuitivement élaborées à partir des suites géométriques de raison $q : u_n = q^n$.

Proposition 5

Soit un réel a et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{na}$.

Puisque pour tout entier naturel n on a $u_n = \mathrm{e}^{na} = \left(\mathrm{e}^a\right)^n$, la suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = \left(\mathrm{e}^a\right)^0 = 1$ et de raison $q = \mathrm{e}^a$.

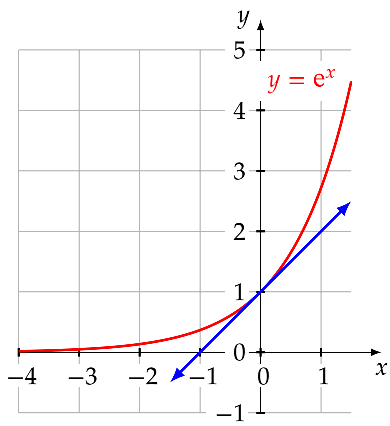
2 Étude de la fonction exponentielle

Proposition 6

La fonction exponentielle :

- est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

  Autrement dit, la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{e}^x > 0$.
- est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.
- est donc une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\,,\ a < b \implies \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$$
- est telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}$:
$$a = b \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \qquad \text{et} \qquad a \leq b \iff \mathrm{e}^a \leq \mathrm{e}^b$$



3 Les fonctions exponentielles

Nous avons indiqué précédemment que les fonctions $x \mapsto q^x$ sont des fonctions exponentielles (de base q). Or pour tous réel x et k on a $\mathrm{e}^{kx} = \left(\mathrm{e}^k\right)^x$ qui est de la forme q^x en posant $q = \mathrm{e}^k > 0$. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont donc des fonctions exponentielles.

Proposition 7

Soient k un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Alors :

- pour tout réel x on a : $f'(x) = k\mathrm{e}^{kx}$.
- $\begin{cases} f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R} & \text{si } k < 0\,; \\ f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} & \text{si } k > 0\,; \\ f \text{ est constante sur } \mathbb{R} & \text{si } k = 0. \end{cases}$