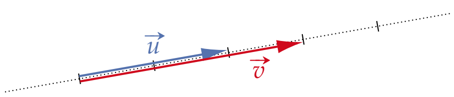
Chapitre 10 : le produit scalaire

Nous savons faire des sommes de vecteurs (ce qui correspond à des enchaînements de translations), et le produit d'un vecteur par un scalaire [1] (qui est au sens près, un agrandissement ou une réduction dudit vecteur), mais quand est-il pour le produit de deux vecteurs ?
Deux « produits de vecteurs » ont ainsi été imaginés, mais pas de façon aussi directe comme on a pu le faire avec le produit de deux réels. Les propriétés et les applications de ces deux produits de vecteurs (appelés produit scalaire et produit vectoriel) sont très nombreuses en mathématiques, en physique, en économie, en analyse des données, dans le traitement des images, etc.
Nous allons aborder dans ce chapitre la notion de produit scalaire.

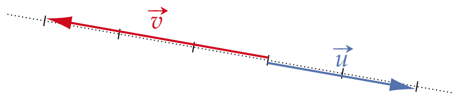
1 Le produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Cas particulier : produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe donc deux types de configuration : les deux vecteurs ont le même sens, ou ils sont de sens contraires.



$\vec{u} = k\,\vec{v}\ ,\ k > 0$



$\vec{u} = \ell\,\vec{v}\ ,\ \ell < 0$

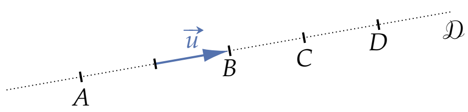
Nous savons déjà que le produit d'un scalaire par un vecteur donne un vecteur. Pour garder une certaine cohérence, le produit de deux vecteurs ne peut évidemment pas être homogène à un vecteur, sinon on pourrait assimiler un des deux vecteurs à un scalaire. Cela étant dit, dans le cas de deux vecteurs colinéaires, il est parfaitement envisageable de réaliser un produit de vecteurs en s'appuyant sur leurs normes et en tenant compte de leurs sens.

Définition 1 : produit scalaire avec deux vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens ;} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

Exemples :



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 3 = 6$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| = 3 \times 4 = 12$$
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{DB}\| = -1 \times 2 = -2$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| = -3 \times 4 = -12$$

1.2 Cas général : produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires

L'activité suivante va nous indiquer une manière de se ramener au cas de deux vecteurs colinéaires à partir de vecteurs qui ne le sont pas. Pour cela, nous allons faire un peu de physique pour parler d'*énergie* et de *travail d'une force*, mais auparavant, voici quelques commentaires sur les notions de *phénomènes*, *propriétés* et *grandeurs physiques*.
Un phénomène physique fait référence à un événement observable ou mesurable se produisant dans le monde physique (on rappelle que le « ou mathématique » n'est pas exclusif, et ce n'est pas parce qu'un phénomène ne s'observe pas « directement » qu'il n'est pas pour autant mesurable).

Exemples : la gravité, l'interaction entre deux corps (dont la chute d'un corps est un exemple), un mouvement, ou encore un changement d'état (fusion, condensation, etc.) sont des phénomènes physiques.

Une propriété physique d'un corps, ou plus généralement d'un système physique, fait référence à une caractéristique qui est propre à ce système, et qui ne dépend pas de facteurs externes. Une propriété physique peut également être observée ou mesurée.

[1] on appelle un scalaire un nombre réel

Exemples : la masse d'un corps, qui est une indication de la quantité de matière qu'il contient, la température, qui renseigne sur son état thermique, la conductivité électrique, qui révèle sa capacité à conduire l'électricité, etc.

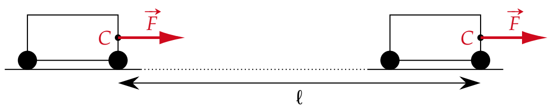
Enfin, une grandeur physique est une notion qui permet de rendre compte d'un phénomène ou d'une propriété physique à partir de mesure(s) ou de calcul(s). On l'exprime avec une valeur numérique suivie d'une unité de mesure qui caractérise cette grandeur. Notons qu'il n'est pas rare qu'une grandeur physique se confonde avec le phénomène ou la propriété à laquelle elle est associée.

Exemples : la grandeur physique qui rend compte de la gravité est l'accélération gravitationnelle (exprimée en m.s^{-2}, par exemple sur la terre, $g \approx 9{,}81$ m.s^{-2}). La grandeur physique qui est associée à la masse ... est la masse elle-même (elle s'exprime en kg).

L'*énergie* est une grandeur physique qui permet de rendre compte du *changement d'état* d'un système (qui est donc un phénomène physique). Il existe plusieurs formes d'énergie : l'énergie cinétique, l'énergie mécanique, l'énergie potentielle, l'énergie électrique, l'énergie thermique, l'énergie de liaison chimique, etc.
On arrive à présent à la notion qui va nous intéresser ici : quand un système se déplace sous l'action d'une force, l'énergie qui est mise en jeu s'appelle un *travail* (noté $\mathcal{W}$), et on parle du *travail de la force qui met le système en mouvement*. Attention, un travail ce conçoit avec un mouvement : si rien ne bouge, le travail est nul, alors même qu'il peut y avoir de l'énergie mise en jeu pour faire apparaître un mouvement (on le conçoit bien par exemple avec le jeu de tir à la corde, quand aucune équipe n'arrive à tirer l'autre ... il n'y a pas de mouvement et donc aucun travail, malgré toute « l'énergie musculaire » dépensée).

Activité 1

1. On va considérer un mobile qu'on cherche à déplacer par traction (on admettra dans l'ensemble de cette activité que ce mobile ne peut pas se soulever, et on néglige toutes forces de frottements). La force de traction $\overrightarrow{F}$ s'exerce en un point C du solide (point de contact entre le solide et l'opérateur), avec une intensité F, et le mobile se déplace d'une longueur ℓ.



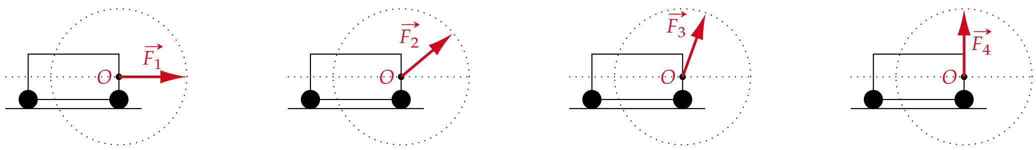
   a) De quoi peut dépendre le travail de cette force de traction ?

   Pour répondre à cette question, on peut l'aborder en se demandant quels sont les paramètres qui peuvent augmenter ou diminuer l'énergie mise en jeu lors de ce déplacement (on peut s'imaginer à la place d'un cheval de trait par exemple).

   b) Intuitivement, à quel type de relation peut-on penser entre le travail et les paramètres dont il dépend.

   c) Établir alors une formule, simple, entre le travail et ces paramètres (comprendre qu'il s'agit donc d'un modèle mathématique, qu'il faudrait confronter à l'expérience pour le valider).

2. On étudie à présent les quatre situations illustrées dans la figure suivante.



   a) Indiquez ce qui montre sur ce schéma que l'intensité de la force est la même dans chaque situation.

   b) La force de traction travaille-t-elle dans tous les cas ? Expliquez.

   c) Intuitivement, dans quel cas la force de traction vous semble travailler le mieux ?

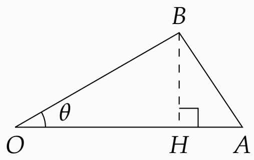
   Quelle est la solution pour rendre compte de ce manque d'efficacité dans les autres cas ?

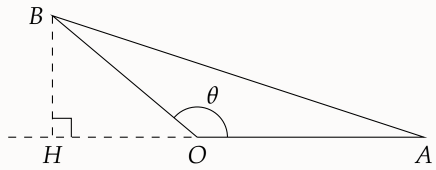
Bilan :
- le travail d'une force est proportionnel à la distance parcourue et à l'intensité de la force appliquée ;
- le travail d'une force dépend de l'inclinaison de cette force par rapport à la trajectoire ;
- *projeter orthogonalement* le vecteur force sur la trajectoire (rectiligne) a du sens.

On va donc dans un premier temps s'intéresser à la notion de projection orthogonale.

Définition 2 : projeté orthogonal

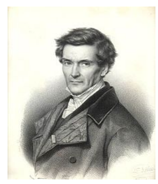
Soient O, A et B trois points quelconques.
Dans le triangle OAB, le pied de la hauteur issue de B est le projeté orthogonal de B sur (OA). Autrement dit, le projeté orthogonal de B sur (OA) est le point H de (OA) tel que $(BH) \perp (OA)$.





Autre formulation : le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$ (on peut aussi considérer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ indifféremment pour faire cette projection). En fait il s'agit d'un *abus de langage*, car un vecteur se projette sur une droite : ici $\overrightarrow{OH}$ se projette sur la droite (OA).

Cela va nous permettre de donner une première définition du produit scalaire, définition qui dérive de celle du travail d'une force qui fût donnée par Gaspard-Gustave Coriolis en 1826, comme s'agissant du « produit du chemin parcouru et de la force *dans le sens* de ce chemin » (ce dernier point faisant évidemment référence au vecteur projeté orthogonalement).

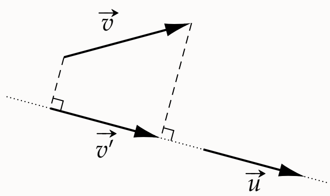


G. G. Coriolis (1792-1843)

Proposition 3 : produit scalaire - cas général

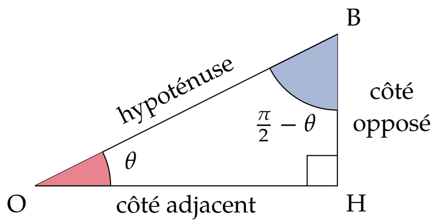
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = \begin{cases} \|\,\vec{u}\,\| \times \|\,\vec{v'}\,\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v'} \text{ sont de même sens ;} \\ -\|\,\vec{u}\,\| \times \|\,\vec{v'}\,\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v'} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$



1.3 Expression trigonométrique du produit scalaire

Rappel : dans un triangle OHB rectangle en O, le cosinus de l'angle en O est le quotient du côté adjacent à O par l'hypoténuse, et son sinus est le quotient du côté opposé à O par l'hypoténuse.



- $\cos(\theta) = \dfrac{OH}{OB}$ d'où $OH = OB \cos(\theta)$

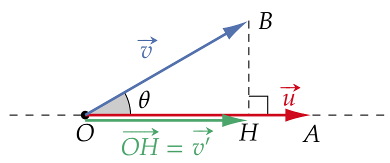
  cette situation reflète la projection de B sur (OH)

- $\sin(\theta) = \dfrac{BH}{BO}$ d'où $BH = BO \sin(\theta) = BO \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

  cette situation reflète la projection de O sur (BH)

On va pouvoir utiliser ces résultats pour proposer une nouvelle expression du produit scalaire. Pour cela, il faut considérer les deux cas de figures suivants :

$\widehat{AOB}$ est un **angle aigu** : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont le **même sens**

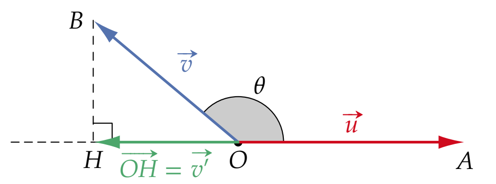


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v'} \|$$

et $\quad \| \vec{v'} \| = \| \vec{v} \| \times \cos(\theta)$

d'où $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\theta)$

$\widehat{AOB}$ est un **angle obtus** : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont des **sens contraires**



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = -\| \vec{u} \| \times \| \vec{v'} \|$$

et $\quad \| \vec{v'} \| = \| \vec{v} \| \times \cos(\pi - \theta) = -\| \vec{v} \| \times \cos(\theta)$

d'où $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\theta)$

On obtient une seule et même relation dans les deux cas, le signe du produit scalaire étant le même que celui de $\cos(\theta)$.

Remarque : dans la *pratique*, on se place surtout dans les cas avec des angles aigus.

Proposition 4

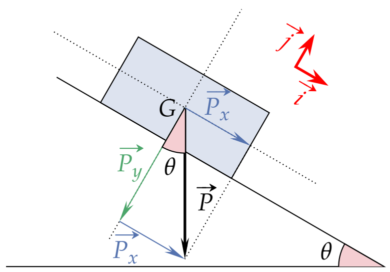
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et θ la mesure de l'angle formée depuis le vecteur $\vec{u}$ vers le vecteur $\vec{v}$. Alors, le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est défini par : $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\theta)$.

Convention d'écriture : le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^{\,2}$.

Dans ce cas particulier on a $\theta = 0$ d'où $\cos(\theta) = 1$, et donc $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \| \vec{u} \|^2}$.

Pour information : décomposition d'un vecteur force dans la pratique

En physique-chimie, nous avons souvent besoin de faire des calculs de produit scalaire, qui correspondent par exemple à des projections de vecteurs forces sur les vecteurs unitaires du repère utilisé. Autrement dit, cela permet de déterminer les composantes d'un vecteur force suivant les axes choisis pour l'étude (on parle de décomposition du vecteur force). Voici un exemple pour clarifier ce propos :



prenons un pavé qui glisse le long d'un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Pour étudier le mouvement du solide, il est assez naturel de choisir une base liée à ce plan incliné, ici il s'agit de la base $\left(\vec{i}\,,\, \vec{j}\, \right)$.

Ce solide est soumis, entre-autres, à l'action de son poids $\vec{P}$ qui se décompose comme suit : $\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y}$.

On note $P = \| \vec{P} \|$ et θ étant la mesure d'un angle aigu, on a $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) > 0$. Ainsi, si on détaille les calculs :

- $\vec{P_y}$ s'obtient en projetant $\vec{P}$ sur l'axe dirigé par $\vec{j}$, et on récupère donc un cosinus, car dans la décomposition de $\vec{P}$, le vecteur $\vec{P_y}$ apparaît comme le vecteur adjacent à θ :

$$\vec{P} \cdot \vec{j} = -P_y \times \| \vec{j} \| = -P_y = -P \cos(\theta) \quad \text{d'où} \quad \vec{P_y} = -P \cos(\theta)\ \vec{j}.$$

- $\vec{P_x}$ s'obtient en projetant $\vec{P}$ sur l'axe dirigé par $\vec{i}$, et on récupère donc un sinus, car $\vec{P_x}$ apparaît comme le vecteur opposé à θ :

$$\vec{P} \cdot \vec{i} = P_x \times \| \vec{i} \| = P_x = P \sin(\theta) \quad \text{d'où} \quad \vec{P_x} = P \sin(\theta)\ \vec{u}i.$$

On obtient donc : $\quad \vec{P} = P \sin(\theta)\ \vec{i} - P \cos(\theta)\ \vec{j} = P\left(\sin(\theta)\ \vec{i} - \cos(\theta)\ \vec{j}\, \right)$

Quand un angle intervient dans un problème (notamment en science physique et en chimie) et qu'on a bien compris comment se font les projections par rapport à cet angle, on peut assez facilement obtenir les expressions demandées, sans trop d'efforts et en se passant de la majorité des détails de calculs. Par exemple, on pourrait trouver comme type de rédaction : « par projections sur les axes du repère, on a $\vec{P} = P \sin(\theta)\ \vec{i} - P \cos(\theta)\ \vec{j}$ », tout simplement (en faisant attention à être rigoureux sur les signes).

Exercice 2

1. On considère un bloc de glace parallélépipédique posé sur un plan horizontal. Ce bloc est le système solide que l'on va étudier.

   a) Faire un schéma, puis effectuer le bilan des forces extérieures appliquées sur le système.

   b) Expliquer pourquoi le système est à l'équilibre.

2. On peut incliner le plan (il fait alors un angle θ par rapport à l'horizontale), et le système glisse le long du support (on néglige toute sorte de frottements).

   a) Faire un nouveau schéma, puis effectuer le bilan des forces extérieures appliquées sur le système.

   b) Lorsqu'une force favorise le déplacement on dit que son travail est moteur, et lorsqu'elle s'oppose au déplacement, on dit que son travail est résistant. Y-a-t-il au moins une force dont le travail est moteur ?

   c) Calculer l'énergie mise en jeu lors du déplacement du solide.

3. Même question en incluant des forces de frottements entre le support et le solide.

Exercice 3 : le skieur (problème ouvert ... facultatif)

On considère un skieur qui veut remonter une piste de ski en téléski. La piste fait un angle α par rapport à l'horizontale, et la perche de traction fait un angle β par rapport à la piste. On admettra que le mouvement est uniforme (la vitesse est constante, il n'y a pas d'accélération).

Après avoir fait un bilan des forces extérieures appliquées sur le skieur, déterminer la valeur de la force de traction. Pour cela, on admettra le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m\ \vec{a}$, ou autrement dit, la somme des forces extérieures appliquées sur le système est égale au produit de sa masse par son vecteur accélération.

1.4 Cas particulier : produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

Définition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Proposition 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2 Propriétés algébriques du produit scalaire

Proposition 7 : propriétés algébriques du produit scalaire

Soient trois vecteurs du plan $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et un réel k. Alors :

1. Propriété de symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. Propriété de bilinéarité : $\begin{cases} \vec{u} \cdot (k\ \vec{v}) = k\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \text{et} \quad (k\ \vec{u}) \cdot \vec{v} = k\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \end{cases}$

3. Identités remarquables : $\begin{cases} (\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{cases}$

Exercice 4

ex. 77, 78 p. 260, ex. 95 p. 262

3 Autres expressions du produit scalaire

3.1 Expressions du produit scalaire avec les normes

À partir des deux premières identités remarquables précédentes, on peut isoler le produit scalaire.

Proposition 8 : expression du produit scalaire avec les normes

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Exercice 5

ex. 69,70 p. 259

3.2 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Proposition 9 : expression analytique du produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,,y')$ du plan muni d'un repère orthonormé. Alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Exercice 6

ex. 68 p. 259, ex. 95 p. 262

Proposition 10 : caractérisation analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,,y')$ du plan muni d'un repère orthonormé. Alors : $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

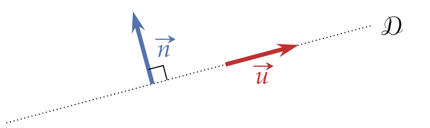
4 Application du produit scalaire en géométrie analytique

4.1 Équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

Définition 11

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.



Proposition 12

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Un point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$: $\quad M\in\mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$.

On peut ainsi construire une équation de droite lui connaissant un vecteur normal. Soient $\vec{n}\,(a\,,\,b)$ un vecteur non nul normal à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A\,(x_0\,,\,y_0)$, et $M\,(x\,,\,y)$ un point quelconque du plan. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\iff ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \\ &\iff ax + by + c \quad \text{en posant } c = -(ax_0 + by_0) \end{aligned}$$

Proposition 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Toute droite dont une équation est de la forme $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}\,(a\,,\,b)$ comme *vecteur normal*.
- Réciproquement, toute droite admettant le vecteur $\vec{n}\,(a\,,\,b)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exercice 7

ex.53, 54, 55 p. 287

4.2 Équation cartésienne de cercles

Proposition 14

Soit M un point du plan et $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$: $M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

5 Applications du produit scalaire

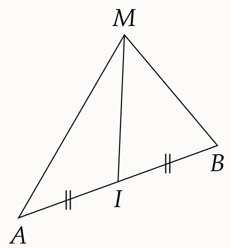
Proposition 15 : formules de la médiane

Soient A et B deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :

(1) $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + 2IB^2$

(2) $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$



Proposition 16 : formules d'Al-Kashi, ou de Pythagore généralisées

Soit ABC un triangle. On pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$. Alors :

(a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ (b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ (c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

Exercice 8

ex.91, 92, 93 p. 261

Proposition 17 : formules des sinus (hors-programme, pour information)

Soit ABC un triangle (non aplati). Si on note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC, alors : $\mathcal{S} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.

Proposition 18 : formules de trigonométrie

1. Formule d'addition :
   - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   - $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
   - $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
   - $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
2. Formule de duplication :
   - $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$
   - $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
3. Formule de linéarisation :
   - $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$
   - $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$