Chapitre 1 : Modèles d'évolutions discrets

1 Généralités sur les suites numériques

- Une suite numérique correspond à une liste ordonnée de nombres.
- Pour ordonner ces nombres on procède par indexation, par exemple, on note ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les trois longueurs d'un triangle.
- Pour produire cette indexation, on utilise une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si on note cette fonction u cela donne :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

  - L'ensemble source $\mathbb{N}$ permet d'ordonner la liste tandis que l'ensemble cible $\mathbb{R}$ contient les nombres de la liste.
  - L'image de n par la fonction u se note u_n, autrement dit $u(n) = u_n$.
  - La suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore (u_n) ou plus simplement (u).
  - u_n est ce qu'on appelle le terme de rang n de la suite (u_n).
- Les termes u_{n-1} et u_{n+1} sont respectivement le prédécesseur et le successeur du terme u_n.

Exemple : $\{ -1\,;\,2\,;\,\pi\,;\,\mathrm{e}^5\,;\,\sqrt{2}\}$ est une suite numérique.

On a : $u_0 = -1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \pi$, etc.

Il peut dans certains cas exister des *relations* qui permettent de calculer les termes d'une suite.

Exemple : la suite $\{ 0\,;\,2\,;\,4\,;\,6\,;\ldots \}$ est la liste qui rassemble l'ensemble des nombres pairs. On peut l'obtenir en écrivant :

- $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ qui est une relation dite « de récurrence »,
- $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 2n$ qui est une relation dite « explicite ».

Définir une suite numérique

Il y a deux façons de le faire :

par récurrence	par une formule explicite
$(u_n) : \begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$	$(u_n) : \ u_n = f(n)$
Chaque terme est fonction de son prédécesseur, pour calculer un terme on a besoin de son prédécesseur et d'un 1^{er} terme.	Chaque terme est fonction de son rang, pour calculer un terme on a uniquement besoin de connaître son rang.

Exercice 1 :

1. *Calculer le terme de rang 5 de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par* $u_n = 2n^2 + 1$.
2. *Calculer le 4ᵉ terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par* $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases}$.
3. *Combien y-a-t-il de termes entre v_9 et v_{2053}.*

Remarque : *parfois*, une suite peut être définie par une relation de récurrence **et** par une relation explicite.

2 Modèles discrets

Les phénomènes physiques, biologiques, naturels, sociologiques (cette liste n'est pas exhaustive) qui subissent une évolution, peuvent parfois être modélisés mathématiquement par des suites numériques. On parle alors de modèles « discrets ». On s'intéresse alors par exemple à l'évolution des phénomènes étudiés dans la durée, jusqu'à ce qu'un seuil soit atteint (et au-delà duquel il n'y a plus d'évolution significative). De même, on peut également suivre l'évolution en fonction d'une quantité, d'une concentration, etc.

Activité 2 : étude théorique dans le domaine de la dynamique des populations.

Notons p_n l'effectif d'une population à un instant n, et considérons que la variation (absolue) entre deux effectifs consécutifs est fonction de l'effectif en cours (donc p_n). On ne connaît pas cette fonction, notons la f pour le moment. Comment pourrions-nous traduire cela mathématiquement ? À quel type de type de relation cela conduit-il ? Que représente cette fonction f ?

Solution : notons Δp_n la variation entre les effectifs p_{n+1} et p_n, alors pour tout entier naturel n : $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$.

D'après ce qui est indiqué, on a donc $\Delta p_n = f(p_n)$ soit $p_{n+1} - p_n = f(p_n)$. On peut réécrire cette équation sous la forme $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$ et on constate que le terme p_{n+1} est finalement une fonction du terme p_n (il ne dépend que de p_n). En d'autres termes, il existe une fonction g telle que $p_{n+1} = g(p_n)$. On reconnaît une relation de récurrence.

La fonction f (où par extension la fonction g) est en fait le modèle à trouver, et dans certains cas on peut exprimer le terme de rang n avec une forme explicite.

Admettons que l'on ait trouvé une forme explicite pour le terme de rang n (c'est à dire que l'on peut exprimer p_n en fonction de n), intéressons nous à trois cas de figure lorsque n devient « très grand ». Mais que veut dire « très grand » ?

En physique, c'est assez subjectif, alors qu'en mathématiques … c'est l'infini : l'infiniment grand correspond à un objet (mathématique) qui peut être aussi grand que l'on veut, et l'infiniment petit à un objet qui peut être aussi petit que l'on veut, ce qui n'est pas envisageable en physique. Pour autant, on va utiliser cette notion d'infini pour étudier trois comportements du terme p_n quand on fait tendre n vers l'infini (cela se note $n \to +\infty$).

Exercice 1

① $u_5 = 2 \times 5^2 + 1 = 51.$

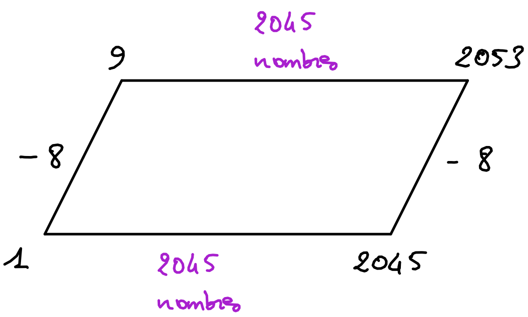
② $v_1 = 2v_0 + 1 = 11$

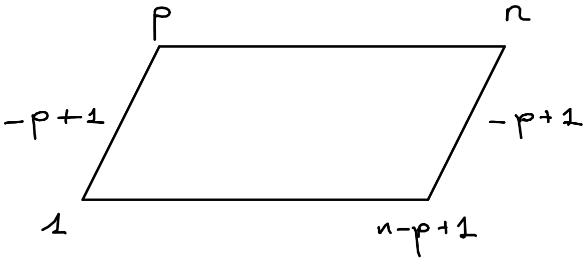
$v_2 = 2v_1 + 1 = 23$

$v_3 = 2v_2 + 1 = 47$

$v_4 = 2v_3 + 1 = 95$

③





2 Modèles discrets

Activité 2 : étude théorique dans le domaine de la dynamique des populations.

> *Notons p_n l'effectif d'une population à un instant n, et considérons que la variation (absolue) entre deux effectifs consécutifs est fonction de l'effectif en cours (donc p_n). On ne connaît pas cette fonction, notons la f pour le moment. Comment pourrions-nous traduire cela mathématiquement ? À quel type de type de relation cela conduit-il ? Que représente cette fonction f ?*

<u>Effectif</u> : nombre d'individus dans une population.

<u>Variation absolue</u> : $\Delta V = V_{finale} - V_{initiale}$

$\Delta V = V_f - V_i$ | $A = B$ ssi $B = A$

ssi $V_f - V_i = \Delta V$ | $+ V_i$

ssi $V_f = \Delta V + V_i$

- $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ correspond à l'extinction de la population ,
- $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$ correspond à une stabilisation de la population. ,
- $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ correspond à une expansion sans limite de la population (ce qui peut poser des problèmes de survie).

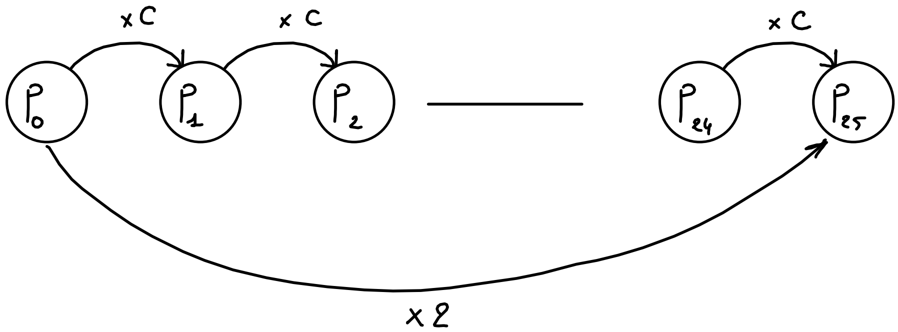
Activité 3 : le modèle de Thomas - Maltus (1766 - 1834 , économiste britannique).

On reprend l'activité précédente en considérant un modèle dans lequel le réel $f(p_n)$ de l'activité précédente est proportionnel à p_n où n représente une année (l'effectif de la population augmente donc d'une fraction de l'effectif en cours).

1. *Traduire mathématiquement cette proposition, puis indiquer ce que cela vous évoque.*
2. *Dans ce modèle, la population double tous les 25 ans, ce qui revient à une augmentation d'environ 2,81 % par an. Expliquer ce pourcentage, puis trouver une relation de récurrence pour exprimer l'effectif de la population.*
3. *En 1800, la population de l'Angleterre est estimée à 8 millions. Compléter la relation de récurrence puis déterminer une relation explicite. À quelle type de suite a-t-on à faire ?*
4. *Conjecturer l'évolution à très long terme.*

1- Il existe un réel non nul r tel que $f(p_n) = r \times p_n$

2-



Culture générale

On a a $C^{25} = 2$ et C s'obtient en prenant la racine 25^e de 2 : $\sqrt[25]{2} \approx 1{,}0281$.

On sait que l'effectif double tous les 25 ans, ce qui revient à multiplier l'effectif par 1,0281 tous les ans : $C = 1{,}0281$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1{,}0281\, p_n = (1+0{,}0281)\, p_n = p_n + 0{,}0281\, p_n$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{2{,}81}{100} \times p_n$$

Rappel de 2de

$C = 1 + \tau$

$\tau = C - 1$

$\tau = 0{,}0281 = \frac{2{,}81}{100}$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite géométrique de raison 1,0281 et de 1er terme $p_0 = 8$.

$$(p_n) : \begin{cases} p_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = 1{,}0281\, p_n \end{cases}$$

relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = 8 \times 1{,}0281^n$$

relation explicite

Ce qu'il faut connaître sur les suites numériques étudiées en 1re

Avec une relation de récurrence

Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Les termes successifs s'obtiennent en ajoutant un même nombre r (la raison) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$	Les termes successifs s'obtiennent en multipliant par un même nombre q (la raison) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$
La différence entre deux termes consécutifs est constante, et égale à r (c'est la caractérisation d'une suite arithmétique) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$	Le quotient entre deux termes consécutifs est constant, et égal à q (c'est la caractérisation d'une suite géométrique) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

Avec une relation explicite

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + rn \iff u_n - u_0 = rn$	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n \iff \frac{u_n}{u_0} = q^n$.
$\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n - u_p = r(n-p)$.	$\forall n, p \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{u_p} = \frac{q^n}{q^p}$.

Somme

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *C'est le nombre de termes multiplié par la moyenne des termes extrêmes.*	$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. *$n+1$ correspond au nombre de termes dans la somme.*

Activité Calculer la somme $6 + 7 + \ldots + 15 = \sum_{k=6}^{15} k = S$

$$S = \sum_{k=6}^{15} k = \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{5} k$$

$$S = (1 + 2 + \ldots + 15) - (1 + 2 + \ldots + 5)$$

$$S = 15 \times \frac{16}{2} - 5 \times \frac{6}{2}$$

$$S = 120 - 15$$

$$S = 105$$

Activité 4 : loi de refroidissement de Newton (modèle discret)

Cette loi stipule que la variation en température d'un corps à chaque instant est proportionnelle à la différence entre la température du corps (noté T_n où n est le nombre de minutes écoulé) et la température du milieu ambiant (noté T_a). On notera k le coefficient de proportionnalité.

1. *Proposer un modèle discret pour décrire ce phénomène.*
2. *On prend $k = -0{,}4$ et $T_a = 25\ ^{o}C$. Montrer que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}6\ T_n + 10$.*
3. *On donne comme température initiale $T_0 = +5^{o}C$. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?*
4. *À l'aide de la calculatrice, calculer T_{10}, T_{20} et T_{30}. Interpréter.*
5. *Conjecturer la limite de la suite à l'aide d'un graphique.*

① $\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k(T_n - T_a)$ k est le coefficient de proportionnalité.

② $T_{n+1} - T_n = -0{,}4(T_n - 25)$

$= -0{,}4T_n + 10$

d'où $T_{n+1} = T_n - 0{,}4T_n + 10$ soit $\boxed{T_{n+1} = 0{,}6T_n + 10}$

③ $T_0 = 5$ donc la suite (T_n) est définie par

$$(T_n) : \begin{cases} T_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0{,}6T_n + 10 \end{cases}$$

- Cette suite est-elle arithmétique ?

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que la différence entre deux termes quelconque mais consécutif est constante.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - u_n = r$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique il suffit de trouver deux couples de termes consécutifs dont les différences ne sont pas égales.

On compare par exemple $u_2 - u_1$ à $u_1 - u_0$ et il faut obtenir $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

Ici $T_0 = 5$, $T_1 = 13$ et $T_2 = 17{,}8$

et $\begin{cases} T_1 - T_0 = 8 \\ T_2 - T_1 = 4{,}8 \end{cases}$ d'où $T_1 - T_0 \neq T_2 - T_1$

et on en déduit que la suite n'est pas arithmétique.

De la même façon la suite n'est pas géométrique car $\dfrac{T_2}{T_1} \neq \dfrac{T_1}{T_0}$