

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

1 Définition

Activité 1

On considère la suite (u_n) définie par son 1^{er} terme u_0 et la relation $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition la suite (u_n) est-elle arithmétique? Géométrique?
2. On se place dans le cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$, et on pose $v_n = u_n + k$ où k représente un nombre réel.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis en fonction de u_n , et montrer que $v_{n+1} = a \left(u_n + \frac{b+k}{a} \right)$.

b) Montrer que $v_{n+1} = a v_n$ si et seulement si $k = \frac{b}{a-1}$. Quelle est alors la nature de la suite (v_n) ?

1 Pour que la suite soit arithmétique il faut $a=1$, et pour qu'elle soit géométrique il faut $b=0$.

2a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + k$

On a donc $v_{n+1} = u_{n+1} + k$ avec $u_{n+1} = a u_n + b$.

Ainsi $v_{n+1} = a u_n + b + k$.

On peut factoriser par a ce qui donne $v_{n+1} = a \left(u_n + \frac{b+k}{a} \right)$

2b $v_{n+1} = a v_n$ ssi $v_{n+1} = a \left(u_n + k \right)$ et d'après a qui précède on a donc

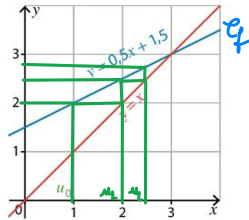
$\frac{b+k}{a} = k$ ce qui nous amène à $k = \frac{b}{a-1}$. La suite (v_n) est alors géométrique.

34

PYTHON ALGO

On considère la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5 u_n + 1,5$.

1. Reproduire le graphique ci-dessous et construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n) .



2. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le terme de rang n de la suite (u_n) .

```
1 def u(n):
2     u = 1
3     for i in range(1, n+1):
4         u = 0,5*u + 1,5
5     return u
```

4. En utilisant la fonction Python ci-dessus, retrouver le résultat conjecturé à la question 2.

La suite est définie par

réurrence :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5 u_n + 1,5 \end{cases}$$

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1,5 \quad u_2 = 2,25$$

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = 0,5x + 1,5$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

46

Solde migratoire

page 33



Calculer

En 2019, une ville compte 5 000 habitants. Les études démographiques montrent que chaque année :

- 20 % des habitants de la ville meurent ou déménagent ;
- 1 200 personnes y naissent ou y emménagent.

Partie 1

On note u_n le nombre d'habitants (exprimé en millier) l'année 2019 + n .

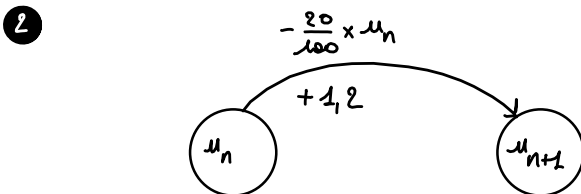
1. Expliquer pourquoi $u_0 = 5$.
2. Montrer, en justifiant, que $u_{n+1} = 0,8u_n + 1,2$.
3. Calculer le nombre d'habitants en 2021.

Partie 2

On pose $v_n = u_n - 6$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Combien y aura-t-il d'habitants dans la ville en 2031 ? Arrondir au nombre entier d'habitants.
4. Déterminer la limite du nombre d'habitants dans la ville lorsque n tend vers $+\infty$.

- ① u_n représente le nombre d'habitants exprimé en millier et en 2019 la ville compte 5000 habitants donc $u_0 = 5$.



20 % des habitants disparaissent chaque année et 1200 habitants apparaissent dans le même temps, cela signifie que :

pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100} u_n + 1,2$

soit $u_{n+1} = 0,8u_n + 1,2$

- ③ u_n est le nombre d'habitants à l'année 2019 + n .

2019 + $n = 2021$ donne $n = 2$, et donc u_2 est le nombre d'habitants en 2021. On trouve $u_2 = 5,36$.

$$u_1 = 0,8 u_0 + 1,2 = 0,8 \times 5 + 1,2 = 5,2$$

$$u_2 = 0,8 u_1 + 1,2 = 0,8 \times 5,2 + 1,2 = 5,36$$

Partie 2

① $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,8 u_n + 1,2$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 6}{u_n - 6} \\ &= \frac{0,8 u_n + 1,2 - 6}{u_n - 6} \quad \text{et} \\ &= \frac{0,8 u_n - 4,8}{u_n - 6} \\ &= \frac{0,8 (u_n - 6)}{u_n - 6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8} \quad (\text{mais il faudrait montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0.)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= 0,8 u_n + 1,2 - 6 \\ &= 0,8 u_n - 4,8 \\ &= 0,8 (u_n - 6) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 0,8 v_n}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 0,8 v_n}$

On reconnaît une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - 6 = 5 - 6 = -1$.

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -0,8^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 6 = -0,8^n + 6$$

3

$$2019 + n = 2031 \quad \text{ssi} \quad n = 12$$

$$\text{donc } u_{12} = -0,8^{12} + 6 \approx 5,93$$

4

Le terme u_n de la suite (u_n) tend vers 6.

$$0,8^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car} \quad 0 < 0,8 < 1$$

$$-0,8^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$6 - 0,8^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$$

~ Baccalauréat ES/L – Nouvelle Calédonie ~

26 novembre 2019

Partie A

La responsable d'un aquarium public constate qu'en l'absence d'action particulière la population d'une espèce de poisson augmente de 20% par an.

Pour démarrer un nouveau bassin, elle décide de prélever 28 poissons à la fin de chaque année

La situation est modélisée par une suite (u_n) de terme initial $u_0 = 150$, le terme u_n donnant une estimation du nombre de poissons au 1^{er} janvier de l'année 2018 + n .

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,2u_n - 28$.
3. On définit la suite (w_n) par : $w_n = u_n - 140$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
Préciser son terme initial.
 - b. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de n .
En déduire u_n en fonction de n .
4. Sachant que l'aquarium ne peut contenir plus de 200 poissons, la responsable doit-elle prévoir l'achat d'un autre aquarium dans les années à venir? Si oui, en quelle année?

Partie B

On sait qu'il y a eu 1 350 visiteurs le premier mois et que le prix d'entrée est fixé à 8 euros. La responsable fait l'hypothèse d'une augmentation mensuelle de la fréquentation des visiteurs de 12%. Elle veut alors savoir, sous cette hypothèse, la recette totale accumulée durant les six premiers mois.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine la recette cherchée.

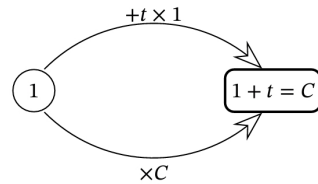
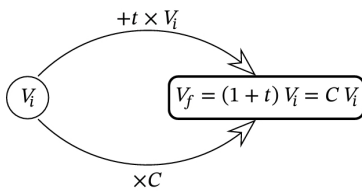
$S \leftarrow 0$
$V \leftarrow 1350$
Pour N allant de 1 à 6
$S \leftarrow \dots$
$V \leftarrow 1,12V$
Fin Pour
$S \leftarrow 8S$

2. Quel est le montant de la recette cherchée?

Introduction

Le nombre de poissons de l'année courante s'obtient en ajoutant 20% du nombre de poissons de l'année précédente à ce même nombre, et en enlevant 28 poissons.

Par ailleurs ajouter 20% revient à multiplier par 1,2.



① D'après la remarque précédente, on a donc

$$u_1 = u_0 + \frac{20}{100} u_0 - 28 = 1,2 u_0 - 28$$

$$\text{d'où } u_1 = 152$$

$$\text{De la même manière : } u_2 = 1,2 u_1 - 28 = 154,4$$

② Pour tout entier naturel n on a de la même manière

$$u_{n+1} = 1,2 u_n - 28 \quad \text{avec } u_0 = 150$$

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - 140$.

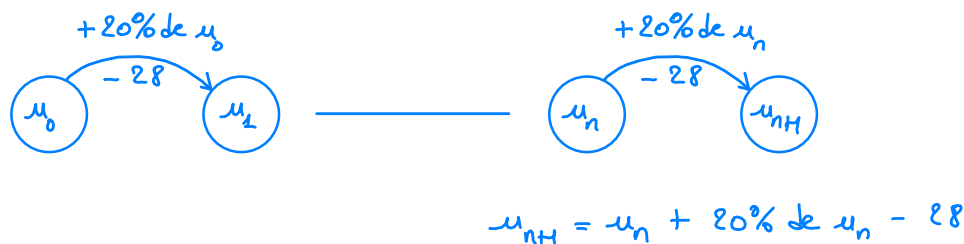
③a Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 140$

$$\begin{aligned} &= 1,2 u_n - 28 - 140 \\ &= 1,2 u_n - 168 \\ &= 1,2 (u_n - 140) \quad \text{et} \quad u_n - 140 = w_n \\ w_{n+1} &= 1,2 w_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n ,

$$(w_n) : \begin{cases} w_0 = u_0 - 140 = 10 \\ w_{n+1} = 1,2 w_n \end{cases}$$

Remarque sur la question 1



(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q=1,2$ et de 1^{er} terme $u_0=10$

3b) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_n = 10 \times 1,2^n$

Or $u_n = w_n + 140$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10 \times 1,2^n + 140$

4) u_n donne une estimation du nombre de poissons au 1^{er} janvier de l'année $2018+n$.

On cherche donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 200$ c'est à dire $10 \times 1,2^n + 140 \leq 200$.

n	U(n)
0	150
1	152
2	154.4
3	157.28
4	160.736
5	164.883 2
6	169.859 84
7	175.831 808
8	182.998 169 6
9	191.597 803 52
10	201.917 364 224

On doit prévoir un autre équilibre à partir de $2018+9 = 2027$.