

Chapitre 2 : Suites arithmético-géométriques

1 Définition

Activité 1

On considère la suite (u_n) définie par son 1^{er} terme u_0 et la relation $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition la suite (u_n) est-elle arithmétique? Géométrique?
2. On se place dans le cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$, et on pose $v_n = u_n + k$ où k représente un nombre réel.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis en fonction de u_n , et montrer que $v_{n+1} = a \left(u_n + \frac{b+k}{a} \right)$.

b) Montrer que $v_{n+1} = a v_n$ si et seulement si $k = \frac{b}{a-1}$. Quelle est alors la nature de la suite (v_n) ?

Définition 1

Dire qu'une suite (u_n) est arithmético-géométrique signifie qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel la suite vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n + b$.

Remarque : si $a = 0$ alors la suite est une suite constante égale à b ,

si $a = 1$ alors la suite est une suite arithmétique de raison b ,

si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors la suite est une suite géométrique de raison a .

2 Représentation graphique (rappel de première)

Exemple : soit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 3$.

Pour représenter cette suite, on utilise une méthode graphique qui s'appuie sur la courbe représentative de la fonction f définissant la suite par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ici, la fonction f est définie par $f(x) = 0,6x + 3$, et le terme u_{n+1} est l'image du terme u_n par la fonction f .

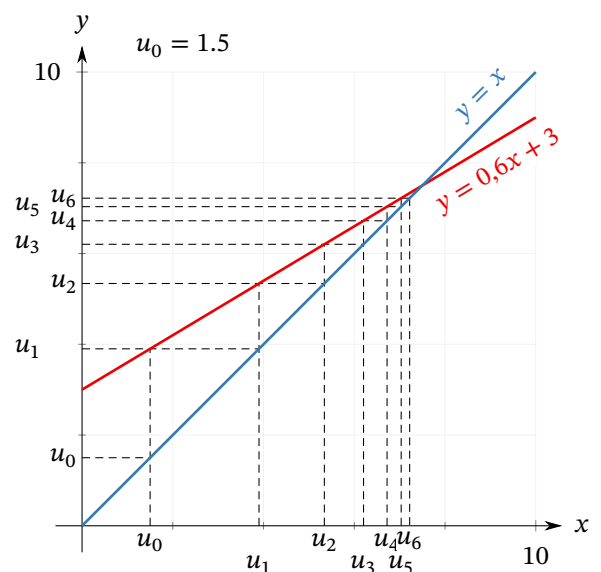
On reporte ensuite la valeur u_{n+1} sur l'axe des abscisses par l'intermédiaire de la droite d'équation $y = x$, puis on réitère le procédé.

Dans cet exemple, la suite semble converger vers une limite ℓ , qui correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux droites. Cette valeur correspond à la solution de l'équation $\ell = 0,6\ell + 3 \iff \ell = 7,5$.

On dit que ce nombre est un point fixe de la fonction f .

Exercice 2

ex. 31, 32, 33, 44, 47 p. 28 à 33



3 Limites des suites géométriques et arithmético-géométriques

3.1 Cas des suites géométriques

Proposition 2 : limite d'une suite géométrique

1. Soit q un réel positif.

▫ si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ (la suite (q^n) converge vers zéro),

▫ si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ (la suite (q^n) diverge vers $+\infty$),

▫ si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ (la suite (q^n) est constante égale à 1).

2. Soit (u) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$.

La limite d'une telle suite est la limite d'un produit pour lequel il faut appliquer la règle des signes.

Proposition 3 : limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

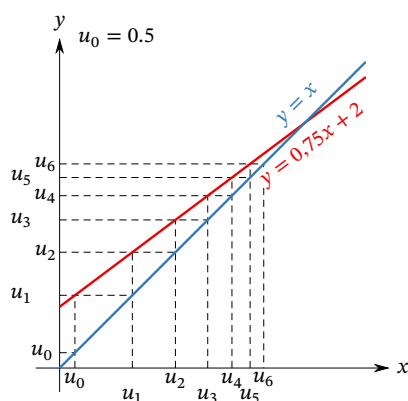
▫ si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$ ▫ (H.P.) si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$.

Exercice 3

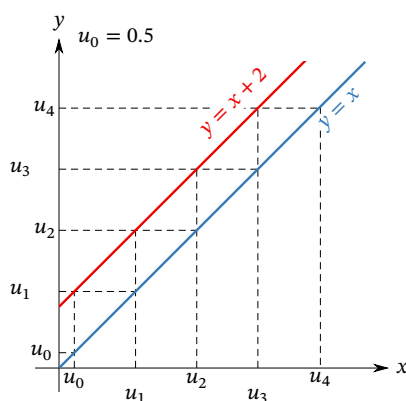
ex. 25 (2), 27 à 30 p. 28 à 33

3.2 Cas des suite arithmético-géométriques

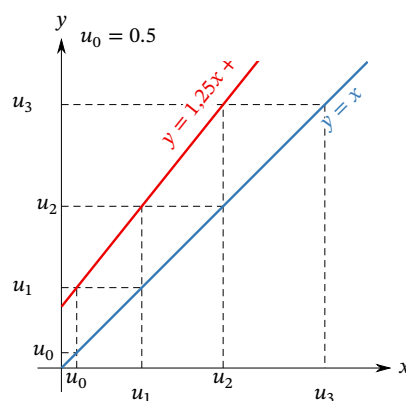
Une suite arithmético-géométrique peut soit converger vers une limite ℓ , soit diverger vers l'infini. Cela dépend des paramètres a et b , ainsi que du premier terme u_0 .



$a \leq 1$: l'écart entre les termes se réduit, la suite converge.



$a = 1$: l'écart entre les termes est constant, la suite diverge vers $+\infty$.



$a \geq 1$: l'écart entre les termes augmente, la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

ex. 34, 35, 43, 46 p. 28 à 33