Chapitre 3 : limites de suites numériques

1 Notion de limite d'une suite

1.1 Les suites convergentes

Activité 1

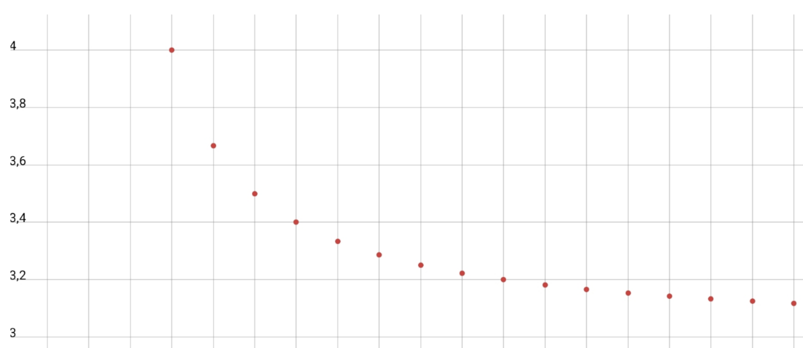
Considérons la suite (u) définie pour les entiers $n \geq 3$ par $u_n = \dfrac{3n-4}{n-2}$.

1. *Expliquer pourquoi $n \geq 3$.*
2. *Tracer un nuage de points représentant les premiers termes de la suite sur la calculatrice en prenant les paramètres suivants : $nMin = 3$, $nMax = 20$, $xMin = 0$, $xMax = 20$, $yMin = 0$, $yMax = 6$.*

   Proposer une conjecture sur la valeur vers laquelle la suite tend lorsque $n \to +\infty$.
3. *On va démontrer cette conjecture en étudiant la différence $u_n - 3$ pour $n \geq 3$.*
   a) *Montrer que cette suite est décroissante.*
   b) *Montrer que cette suite est strictement positive.*
   c) *Établir une conjecture sur la limite de cette suite lorsque $n \to +\infty$.*

① On démarre la suite à partir d'un rang où le dénominateur ne s'annule pas, d'où $n \geqslant 3$.

②



Conjecture : la suite tend vers 3 quand n tend vers $+\infty$.

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$ qui on peut écrire $u_n - 3 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

③ Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3n-4}{n-2} - 3$

$= \dfrac{3n-4}{n-2} - 3 \times \dfrac{n-2}{n-2}$

$= \dfrac{3n-4-3(n-2)}{n-2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - 3 = \dfrac{2}{n-2}}$

(3a) Posons pour tout $n \geqslant 3$, $v_n = u_n - 3$ donc $\boxed{v_n = \dfrac{2}{n-2}}$

<u>Montrons que la suite (v_n) est décroissante</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n-2}$

$$= \frac{2(n-2) - 2(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{2n - 4 - 2n + 2}{(n-1)(n-2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{(n-1)(n-2)}$$

Or $n \geqslant 3$ donc $n-1 \geqslant 2 > 0$ et $n-2 \geqslant 1 > 0$ donc par produit $(n-1)(n-2) > 0$ et par quotient $\dfrac{-2}{(n-1)(n-2)} < 0$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 3$, $v_{n+1} - v_n < 0$ ssi $v_{n+1} < v_n$ ce qui signifie que la suite (v_n) est strictement décroissante.

04/10/24

(3.b) On a $n \geqslant 3$ donc $n-2 \geqslant 1 > 0$ et par quotient $v_n = \dfrac{2}{n-2} > 0$.

(3.c) <u>Bilan sur la suite (v_n)</u>

- (v_n) est strictement décroissante $\qquad v_n = u_n - 3$
- (v_n) est strictement positive

On en déduit que $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$ car $u_n = v_n + 3$.

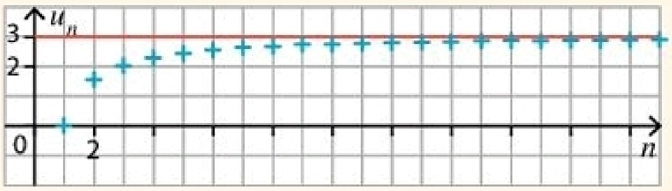
2 AUTOMATISMES

Conjecturer graphiquement et avec la précision permise par le graphique, la limite de la suite représentée dans chaque cas ci-dessous.

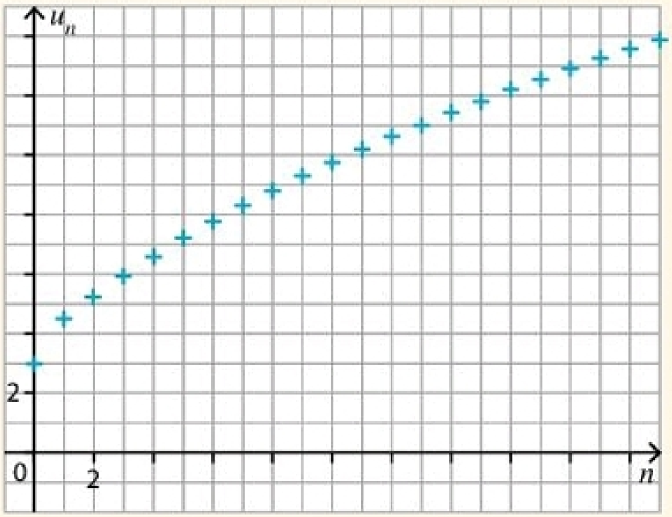
$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

Elle est convergente.

1.



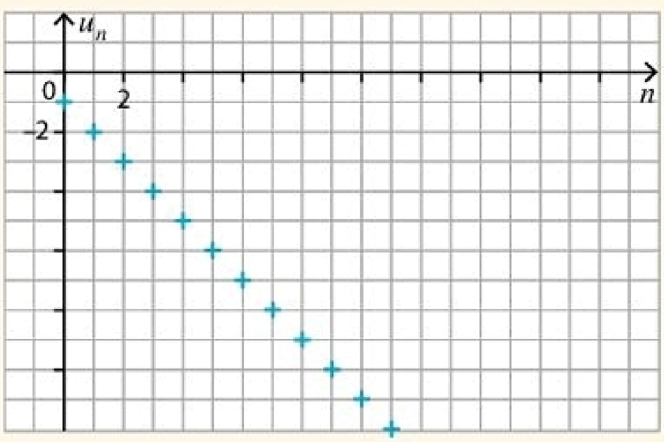
2.



$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Elle est divergente

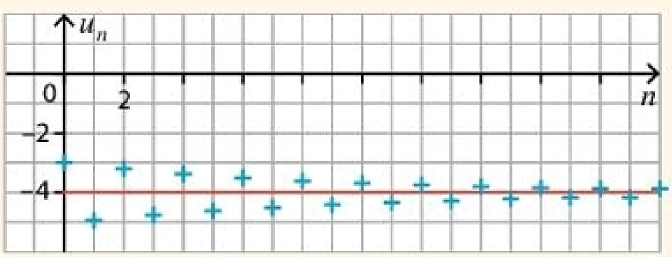
3.



$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Elle est divergente

4.



$\lim_{n \to +\infty} u_n = -4$

Elle converge.

7 Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n, par les expressions ci-dessous.

page 28

1. $u_n = n^2 + n + 3$
2. $v_n = -2n^3 - 3n^2 - n + 1$
3. $w_n = -n^4 + 2$
4. $t_n = 3\sqrt{n} + n$

$\boxed{1}$ On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$\boxed{2}$ On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

donc par produit

$\lim\limits_{n \to +\infty} -2n^3 = -\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -3n^2 = -\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$

Enfin, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Par produits puis somme on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

$\boxed{3}$ $w_n = -n^4 + 2$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^4 = -\infty$ et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$

$\boxed{4}$ $t_n = 3\sqrt{n} + n$

Par produit puis somme sur des suites de référence, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$$

8 Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n non nul, par les expressions ci-dessous.

page 28

1. $u_n = \frac{2}{n} + 4$
2. $v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + 1$
3. $w_n = -\frac{3}{n^3} + \frac{1}{n}$
4. $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} - 5$

$\boxed{1}$ $u_n = \frac{2}{n} + 4 = 2 \times \frac{1}{n} + 4$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$

et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4.$

$\boxed{2}$ $v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ donc par somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1.$

$\boxed{3}$ $w_n = -\frac{3}{n^3} + \frac{1}{n}$

Par opérations sur des suites de références, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0.$

$\boxed{4}$ $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} - 5$

$\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -5$

9 Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n non nul, par les expressions ci-dessous.

page 29

1. $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$
2. $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$
3. $w_n = -n^3 + \frac{2}{n}$
4. $t_n = -\sqrt{n} - \frac{1}{n} + 1$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\boxed{2}$ Par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = 0$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -\infty$

10 Déterminer la limite des suites définies pour tout entier naturel n, par les expressions ci-dessous.

1. $u_n = (n+1)\left(n - \frac{1}{2}\right)$
2. $v_n = \left(-2n^2 - n\right)(2+n)$
3. $w_n = n\sqrt{n} + n^2$
4. $t_n = (n+1)\sqrt{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ par produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ par application de la règle des signes.

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

11 Déterminer la limite des suites définies pour tout entier naturel n non nul, par les expressions ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$ 2. $v_n = \dfrac{n+1}{1+\frac{1}{n}}$ 3. $w_n = \dfrac{3-\frac{2}{n^2}}{n}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$ donc par quotient

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \frac{2}{n^2} = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc par quotient

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

12 **1.** On considère la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = 3n^3 - 6n^2 + 9n - 6.$$

a. Expliquer pourquoi on trouve une forme indéterminée dans la recherche de la limite de u_n.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = 3n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right).$$

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. En s'inspirant de la méthode précédente, déterminer la limite de la suite définie, pour tout entier n, par :

$$v_n = 2n^4 - 4n^2 + n - 6.$$

$\boxed{1}$ Par somme il y a une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, il faut factoriser.

$$u_n = 3n^3 - 6n^2 + 9n - 6$$
$$= 3n^3 \times \frac{3n^3 - 6n^2 + 9n - 6}{3n^3}$$
$$u_n = 3n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)$$

$$u_n = 3n^3 - 6n^2 + 9n - 6$$
$$= n^3 \times \frac{3n^3 - 6n^2 + 9n - 6}{n^3}$$
$$u_n = n^3\left(3 - \frac{6}{n} + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n^3}\right)$$

Par opérations sur de suites de référence, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} = 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^3 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Remarque on factorise par le terme qui domine les autres pour le mettre en évidence.

$\boxed{2}$ $v_n = 2n^4 - 4n^2 + n - 6$

Par somme on constate la présence d'une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination on factorise :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2n^4 - 4n^2 + n - 6 = 2n^4 \times \frac{2n^4 - 4n^2 + n - 6}{2n^4}$

$$= 2n^4\left(1 - \frac{4n^2}{2n^4} + \frac{n}{2n^4} - \frac{6}{2n^4}\right)$$

$$= 2n^4\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{3}{n^4}\right)$$

Or par opérations sur des suites de références on a

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{3}{n^4} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} 2n^4 = +\infty$$

Ainsi par produit $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Pour tous nombres x et y :

- $x^0 = 1$
- $x^1 = x$
- $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^m \times x^{-n} = x^{m-n}$
- $(x^m)^n = x^{m \times n}$
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ avec $y \neq 0$

15 1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 - 4n + 2}.$$

a. Expliquer pourquoi on trouve une forme indéterminée dans la recherche de la limite de u_n.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{2\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}{1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. En s'inspirant de la méthode précédente, déterminer la limite de la suite définie pour tout entier n par :

$$v_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^2 + 3n}.$$

$\boxed{1}$ Par somme le numérateur et le dénominateur présentent des formes indéterminées. Factorisons :

- $2n^2 - 3n + 1 = n^2 \times \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}$
  $= n^2\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

- $n^2 + 3n = n^2 \frac{n^2 + 3n}{n^2} = n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)$

- Donc $u_n = \dfrac{\cancel{n^2}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$

$$u_n = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

$\boxed{2}$ $v_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^2 + 3n}$

Par quotient on constate qu'il y a une forme indéterminée. Factorisons.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = n \times \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$ donc

par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}} = 1$ et par produit

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exercice calculer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $3n^4 + 5n^2 + \frac{2}{n} + 4\sqrt{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^4 \; \frac{3n^4 + 5n^2 + \frac{2}{n} + 4\sqrt{n}}{n^4}$$

$$= n^4\left(3 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5} + \frac{4\sqrt{n}}{n^4}\right) \quad \text{et} \quad \frac{4\sqrt{n}}{n^4} = \frac{4\sqrt{n}}{n^3 \times (\sqrt{n})^2} = \frac{4}{n^3\sqrt{n}}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^4 \left(3 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5} + \frac{4}{n^3\sqrt{n}}\right)}$

Par produit : $n^3\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Par quotient : $\frac{4}{n^3\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par somme : $3 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5} + \frac{4}{n^3\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$

Par produit : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

16 Déterminer la limite des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = \frac{3n^3 - n + 1}{n^2 - 2n + 1}$ pour tout entier naturel $n > 2$.
2. $v_n = \frac{2n^2 - n + 4}{n^3 + n + 1}$ pour tout entier naturel n.
3. $w_n = \frac{n - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1

$$u_n = \underbrace{\boxed{\frac{n^3}{n^2}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty} \times \frac{\overbrace{\boxed{\left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}}^{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 3}}{\underbrace{\boxed{\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

2

$$v_n = \underbrace{\boxed{\frac{n^2}{n^3}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \times \frac{\overbrace{\boxed{2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}}^{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 2}}{\underbrace{\boxed{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3

$$w_n = \frac{n}{n} \times \frac{1 - \frac{\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}} = \underbrace{\boxed{\frac{n}{n}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \times \frac{\overbrace{\boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}}^{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}}{\underbrace{\boxed{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

17 PRISE D'INITIATIVE

Déterminer la limite des suites définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{-3n^2 - 2n + 1}{3 + \frac{1}{n}}$ 2. $v_n = 5n^3 - 3n\sqrt{n}$

3. $w_n = \dfrac{-4n^3 + n^2 + n - 1}{n^3 + n^2 - 4n - 3}$ 4. $t_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n^2 - n + 1}$

1 $-3n^2 - 2n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ et $3 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$

donc par quotient $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

2 $v_n = n^3 \times \dfrac{5n^3 - 3n\sqrt{n}}{n^3} = n^3\left(5 - \dfrac{3}{n\sqrt{n}}\right)$

car $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^3} = \dfrac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n} \times n^2} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{\cancel{\sqrt{n}} \times 1}{n \times \cancel{\sqrt{n}} \times \sqrt{n}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

Or $n\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc par quotient $\dfrac{3}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et par somme $5 - \dfrac{3}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 5$.

On a donc par produit $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

3 On constate la présence d'une forme indéterminée au numérateur.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -4n^3 + n^2 + n - 1 = n^3\left(-4 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}\right)$

et $n^3 + n^2 - 4n - 3 = n^3\left(1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^2} - \dfrac{3}{n^3}\right)$

ainsi $w_n = \dfrac{-4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} - \frac{3}{n^3}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -4$

4 Par quotient il y a une forme indéterminée

Pour tout entier naturel n :

$(n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$ et $t_n = \dfrac{n^2 + n - 2}{n^2 - n + 1} = \dfrac{1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$