3 CALCULATRICE

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$\text{et } g(x) = \frac{2 - x^2}{x^2 + 1}.$$

Pour chaque fonction, en traçant la courbe représentative avec la calculatrice :

- conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$;
- déterminer les éventuelles asymptotes horizontales.

<u>Au voisinage de $+\infty$</u>

Par somme on abouti à une forme indéterminée. On factorise pour lever l'indétermination.

Pour tout réel x on a $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$= x^2 \times \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2}$$

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$$

Or $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc par produit $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$

<u>Au voisinage de $-\infty$</u>

Par produit $-2x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $x^2 \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et par

somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et il n'y a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$

2 <u>Au voisinage de $+\infty$</u>

Par quotient on a une forme indéterminée

Pour tout réel x (x^2+1 est strictement positif donc g est définie sur $\mathbb{R}$) on a :

$$g(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{2}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Or $\frac{2}{x^2}-1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$ et $1+\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$.

<u>Au voisinage de $-\infty$</u> :

par le même calcul on aboutit à $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

On en déduit que la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de g au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

6 VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

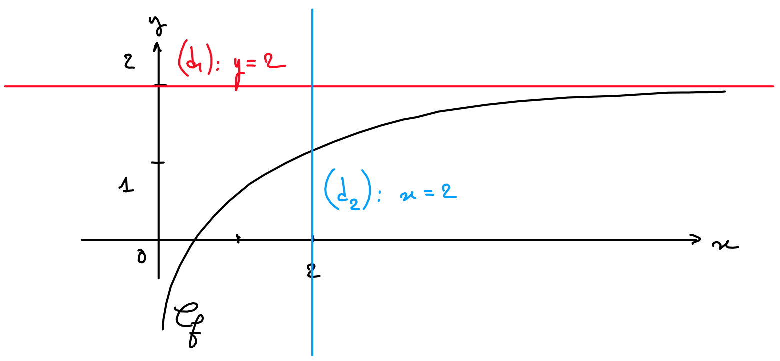
1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation $x=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

2. Si $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

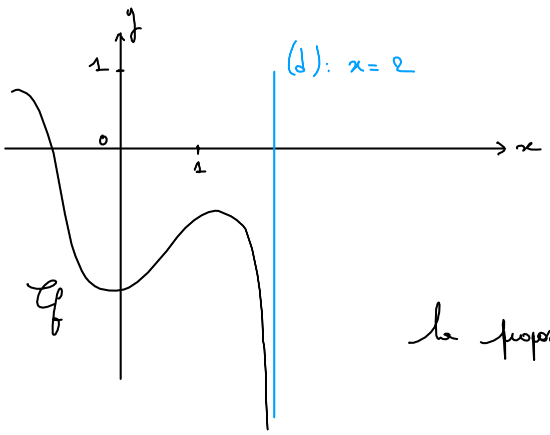
3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$, alors la droite d'équation $y=-5$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

1 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ alors la courbe de f admet la droite d'équation $y=2$ pour asymptote.

Donc la proposition est fausse.



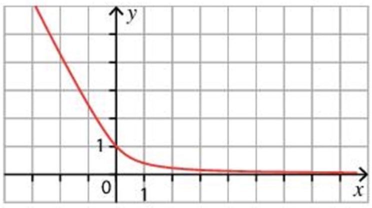
2



La proposition est vraie

3 La proposition est vraie (par définition).

7 On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



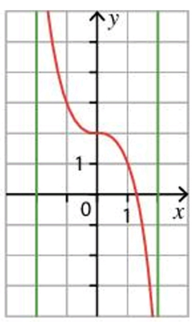
1. Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Peut-on en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote ? Si oui, donner son équation.

page 58

<u>Conjecture</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

8 On a représenté ci-contre une fonction f définie sur $]-2\,;\,2[$.
1. Conjecturer ses limites en -2 et en 2.
2. Peut-on en déduire que la courbe représentative de f admet des asymptotes ? Si oui, donner leurs équations.

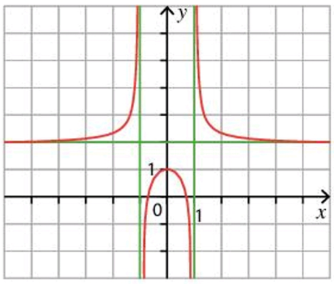


1 $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$

2 La courbe de f admet deux asymptotes d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

9 On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

1. Conjecturer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.



2. Peut-on en déduire que la courbe représentative de f admet des asymptotes ? Si oui, donner leurs équations.
3. Conjecturer les limites de f quand x tend vers 1 et -1.
4. Peut-on en déduire que la courbe représentative de f admet des asymptotes ? Si oui, donner leurs équations.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

17 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{1-x}$
2. $g(x) = \dfrac{x+3}{-2x^2+1}$
3. $h(x) = \dfrac{-4x+2}{-5x^2+x-1}$
4. $i(x) = \dfrac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}$

1 Par quotient on aboutit à une forme indéterminée.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^2 + 2 = x^2\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 1 - x = -x + 1 = x\left(-1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{1+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{1}{x}}$$

Or $1 + \dfrac{2}{x^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$ et $-1 + \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -1$

Donc par quotient $\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -1$ et par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

2 $\quad x+3 = x\left(1+\frac{3}{x}\right)$ et $-2x^2+1 = -2x^2 \times \dfrac{-2x^2+1}{-2x^2}$

$$= -2x^2 \times \left(\frac{-2x^2}{-2x^2} + \frac{1}{-2x^2}\right)$$

$$= -2x^2\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

donc $g(x) = \dfrac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{3}{x}}{-2x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}$

$1 - \dfrac{1}{2x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc par produit $-2x\left(1-\dfrac{1}{2x^2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

De plus $1 + \dfrac{3}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc par quotient $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

18 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \dfrac{1}{x-4}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \dfrac{1}{x-4}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{1}{3-x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{1}{3-x}$

1 Brouillon.

$x \longrightarrow 4$ $\quad -4$

$x-4 \longrightarrow 0$

On a $x-4 \xrightarrow[\substack{x \to 4 \\ x > 4}]{} 0^+$ et par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \dfrac{1}{x-4} = +\infty$

2 On a $x-4 \xrightarrow[\substack{x \to 4 \\ x < 4}]{} 0^-$ et par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$

3 $3-x \xrightarrow[x>3]{x\to 3} 0^-$ et par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{1}{3-x} = -\infty$

$x>3$, prenons par exemple $x=4$, alors $3-4=-1<0$ d'où 0^-

19 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x}{3x-6}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x}{3x-6}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{x^2}{20-5x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2}{20-5x}$

1

$x \xrightarrow[x>2]{x\to 2} 2^+$ | $\times 3$

$\Leftrightarrow 3x \xrightarrow[x>2]{x\to 2} 6^+$ | -6

$\Leftrightarrow 3x-6 \xrightarrow[x>2]{x\to 2} 0^+$

Donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x}{3x-6} = +\infty$

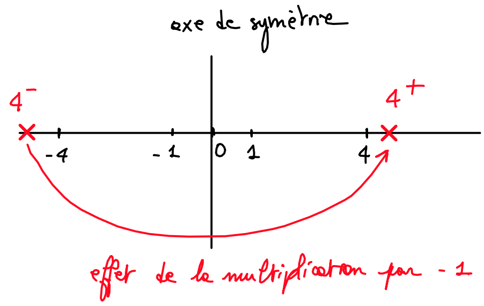
4 $x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} 4$ et donc $x^2 \xrightarrow[x<4]{x\to 4} 16$

De plus $x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} 4^-$ | $\times(-1)$

$\Leftrightarrow -x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} -4^+$ | $\times 5$

$\Leftrightarrow -5x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} -20^+$ | $+20$

$\Leftrightarrow 20-5x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} 0^+$



ou alors écrire $20-5x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} 0$ puis calculer de tête $20-5x$ avec $x<4$, par exemple $x=3$ qui donne $20-5x=5>0$ et donc modifier le texte écrit avec $20-5x \xrightarrow[x<4]{x\to 4} 0^+$

20 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est présenté ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	2	↗	5	↘	-1

1. Lire dans ce tableau les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 3x^2 - 2.$$
a. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)+g(x)]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)+g(x)]$.
c. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)\times g(x)]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)\times g(x)]$.
d. Déterminer, lorsque cela est possible, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

On en déduit que la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$.

2a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2b

- $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc par somme $f(x)+g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

- $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

donc par somme $f(x)+g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

2c $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\times g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\times g(x) = -\infty$

2c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ aboutit à une forme indéterminée $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^-$

Exercice déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto e^{2x+3}$

Posons $X = 2x+3$.

On a $X \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^X \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ donc $e^X \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

c'est à dire $e^{2x+3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

On a $X \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $e^X \xrightarrow[X \to -\infty]{} 0$ donc $e^{2x+3} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Exercice déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{3x^2-5}$

Posons $X = 3x^2 - 5$

On a $X \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\sqrt{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ donc $\sqrt{X} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

c'est à dire que $\sqrt{3x^2-5} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Exercice déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1+2e^x}{e^x+2}}$ Rq : $\dfrac{1+2e^x}{e^x+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $e^x+2>2$.

Au voisinage de $+\infty$, l'expression $\dfrac{1+2e^x}{e^x+2}$ conduit à une forme indéterminée.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$1 + 2e^x = 2e^x \times \frac{1+2e^x}{2e^x} = 2e^x\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$$

et $$e^x + 2 = e^x \times \frac{e^x+2}{e^x} = e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $$\frac{1+2e^x}{e^x+2} = \frac{2\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{2e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = 2 \times \frac{1+\frac{1}{2e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}$$

On a $1 + \dfrac{1}{2e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $1 + \dfrac{2}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc par quotient puis produit on a $\dfrac{1+2e^x}{e^x+2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$

Posons $X = \dfrac{1+2e^x}{e^x+2}$ donc $X \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$ et $\sqrt{X} \xrightarrow[X \to 2]{} \sqrt{2}$

donc $\sqrt{X} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{2}$ soit $\sqrt{\dfrac{1+2e^x}{e^x+2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{2}$