Chapitre 5 : Dérivabilité des fonctions

1 Dérivation d'une fonction

Une étude sur les tangentes à une courbe permet de constater que ces dernières « suivent » l'évolution de la courbe (fig. 5.1). Cette évolution étant liée aux variation de la fonction qui lui est associée, s'est alors posé la question de savoir comment caractériser les variations d'une fonction à l'aide de ces tangentes. C'est ce qui a conduit à l'étude sur les nombres dérivés en classe de première.

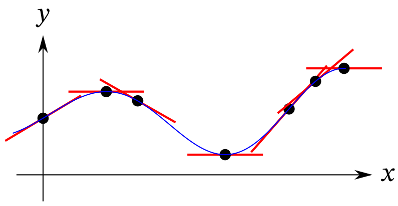


Figure 5.1

On a alors considéré la tangente à une courbe en un point A comme une droite limite (fig. 5.4) : celle d'une droite (AM), sécante à la courbe, et dont le point M tend vers le point A (fig. 5.2 et 5.3).

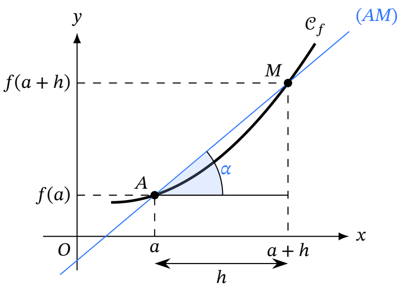


Figure 5.2

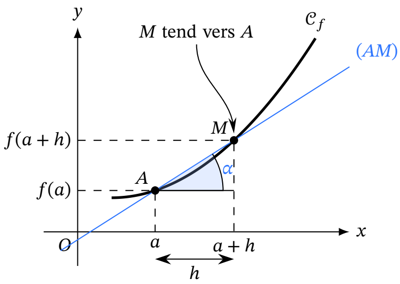


Figure 5.3

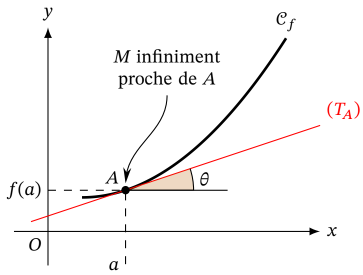


Figure 5.4

On définit alors le taux de variation (ou d'accroissement) $\tau_{f,a}(h)$ de la fonction f entre les points A et M d'abscisses a et $a+h$: c'est le quotient qui exprime le rapport entre la variation de f relativement à une variation en abscisse.

$$\boxed{\tau_{f,a}(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

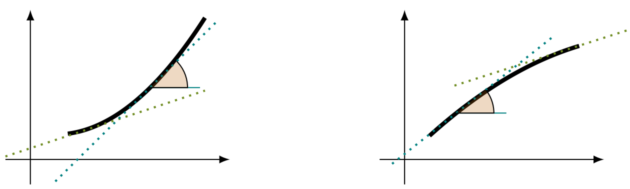
On montre également que ce taux de variation est égal au coefficient directeur m_{AM} de la sécante (AM).

$$\boxed{m_{(AM)} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tau_{f,a}(h)}$$

Lorsqu'on fait tendre le point M vers le point A, la sécante (AM) tend vers une droite limite qui est la tangente à la courbe au point A. Le taux de variation tend donc vers une valeur limite, qui correspond au coefficient directeur de la tangente. Cette valeur limite, si elle existe, est notée $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m_{(T_A)}}$$

Localement, un nombre dérivé peut renseigner sur le sens de variation d'une fonction. En effet, s'il est positif (coefficient directeur de la tangente positif), cela signifie que localement la fonction est croissante. Au contraire, s'il est négatif (coefficient directeur de la tangente négatif), cela signifie que localement la fonction est décroissante (fig. 5.5 et 5.6). Entre les deux se trouve le cas d'un nombre dérivé nul, qui indique (en général) la présence d'un extremum (maximum ou minimum).



fonction croissante

$\Leftrightarrow$ coefficient directeur de la tangente positif
$\Leftrightarrow$ nombre dérivé positif

Figure 5.5

fonction décroissante

$\Leftrightarrow$ coefficient directeur de la tangente négatif
$\Leftrightarrow$ nombre dérivé négatif

Figure 5.6

Si on étend ce procédé, non pas en un point d'abscisse a, mais sur tout un domaine, on obtient une fonction dérivée qui nous permet d'étudier les variations de la fonction sur ce domaine.

Définition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel dans I et h un réel non nul.

- On dit que f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement $\tau_{f,a}(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ entre a et $a+h$ possède une limite finie quand h tend vers 0. Si cette limite est finie, on l'appelle **nombre dérivé de** f **en** a, et on la note $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Une fonction f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel x de I.

  La fonction qui, à chaque nombre réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. Par convention, on la note f'.

La notation f' est dûe au mathématicien LAGRANGE (1736 - 1813). Elle est très simple à utiliser dans le cas des fonctions qui dépendent d'une seule variable. Pour obtenir des dérivées successives, on rajoute des symboles « prime ». Par exemple, la fonction dérivée seconde (qui est la fonction dérivée de la première fonction dérivée) se note f'' : $f'' = (f')'$.

Proposition 2 : équation d'une tangente

Soient f une fonction dérivable en a, et A un point de sa courbe représentative de coordonnées $(a\,,\,f(a))$. Alors l'équation réduite de la tangente (T_A) à la courbe en A est : $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$.

Proposition 3

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Exercice 1

ex. 1 à 9 p. 82 - 93

2 Dérivation des fonctions usuelles et opérations sur les dérivées

Proposition 4

fonction f	expression	domaine de définition	dérivable sur	fonction dérivée f'
constante	p où $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
affine	$mx+p$ où $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
carré	x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
cube	x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
puissance	x^n où $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}

fonction f	expression	domaine de définition	dérivable sur	fonction dérivée f'
inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$	$-\frac{1}{x^2}$
racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
valeur absolue	$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$	$\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ +1 & \text{si } x>0 \end{cases}$
exponentielle	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
logarithme népérien	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, et deux réels λ et μ.

Proposition 5

Fonction à dériver	dérivable	fonction dérivée
λu où $\lambda \in \mathbb{R}$	sur I	$\lambda u'$
$u+v$	sur I	$u'+v'$ la dérivée d'une somme est la somme des dérivées
$\lambda u+\mu v$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	sur I	$\lambda u'+\mu v'$ la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées
uv	sur I	$u'v+v'u$
u^2	sur I	$2u'u$
$\dfrac{u}{v}$	$\forall x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
$\dfrac{1}{v}$	$\forall x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\forall x \in I$ tel que $u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(mx+p)$	$\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $mx+p \in I$	$mu'(mx+p)$
e^u	sur I	$u'\,\mathrm{e}^u$

Exercice 2

ex. 10 à 16 p. 82 - 93

3 Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème 6 : fonction dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.
- si $\begin{array}{l} f' \geq 0 \\ f' > 0 \end{array}$ sur I alors f est $\begin{array}{l} \text{croissante} \\ \text{strict. croissante} \end{array}$ sur I.
- si $\begin{array}{l} f' \leq 0 \\ f' < 0 \end{array}$ sur I alors f est $\begin{array}{l} \text{décroissante} \\ \text{strict. décroissante} \end{array}$ sur I.

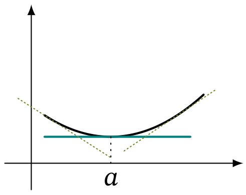
Théorème 7 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction dérivable

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et $a \in J$. Si f admet un **extremum local** en a, alors $f'(a) = 0$. Autrement dit, il est nécessaire d'avoir $f'(a) = 0$ pour que f admette un **extremum local** en a.

Théorème 8 : condition suffisante d'existence d'un extremum local pour une fonction dérivable

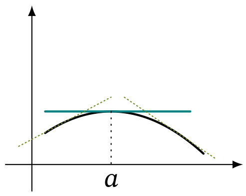
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et $a \in J$. Si f' **s'annule en changeant de signe** en a, alors $f(a)$ est un **extremum local** de f sur J. Autrement dit, il est suffisant que f' s'annule en changeant de signe en a pour que f admette un extremum local en a.

La figure 5.7 résume ces situations :



passage par un minimum :

le coefficient directeur de la tangente passe d'une valeur négative à une valeur positive au voisinage de a.



passage par un maximum :

le coefficient directeur de la tangente passe d'une valeur positive à une valeur négative au voisinage de a.

Figure 5.7

Exercice 3

ex. 17 à 46 p. 82 - 93

Exercice 4

Thème économie : Coût de production - ex. 48, 50 p. 88 - 89
Thème biologie : ex. 49, 51 p. 88 - 89
Thème : calculs d'aire et de volume - ex. 55, 56 p 88 - 89

4 Quelques exemples de calculs de fonctions dérivées

Calculer une fonction dériver ne s'arrête pas à simplement trouver une expression : il s'agit surtout de la mettre en forme afin de pouvoir l'exploiter pour une étude éventuelle. Il faut donc bien connaître les procédés simplification, de factorisation et de développement (cette liste de résultats à connaître n'est pas exhaustive).

① Soit la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)\left(x^2 + 3x + 2\right)$.

- On a $f = uv$ avec $u(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, et $v(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right)$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.

- On a $u = u_1 + u_2$ avec $u_1(x) = \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et $u_2(x) = 2$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que u est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

  Par somme, $u' = u_1' + u_2'$ avec $u_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $u_2'(x) = 0$ donc $\boxed{u'(x) = -\frac{1}{x^2}}$.

- On a $v = v_1 + v_2 + v_3$ avec $v_1(x) = x^2$, $v_2(x) = 3x$ et $v_3(x) = 2$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que v est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  Par somme, $v' = v_1' + v_2' + v_3'$ avec $v_1'(x) = 2x$, $v_2'(x) = 3$ et $v_3'(x) = 0$ donc $\boxed{v'(x) = 2x + 3}$.

- f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$, et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + 3x + 2\right) + \left(2x + 3\right)\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \frac{4x^3 + 7x^2 - 2}{x^2}}.$$

Une fois bien compris ces opérations, **on peut rédiger de façon plus efficace** :

On a $f = uv$ avec $u(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)$ et $v(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right)$.

De plus : | u est définie sur $\mathbb{R}^*$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$,

| v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)\left(x^2 + 3x + 2\right)$$

$f' = u'v + v'u$

avec $\left| \begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{x} + 2 & v(x) = x^2 + 3x + 2 \\ u'(x) = -\frac{1}{x^2} & v'(x) = 2x + 3 \end{array} \right.$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + 3x + 2\right) + \left(2x + 3\right)\left(\frac{1}{x} + 2\right)$$

soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{4x^3 + 7x^2 - 2}{x^2}}$

(2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = x^2 + 1$.

De plus : | u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$,

| $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ v(x) \neq 0$ (car $\forall x \in\ ,\ x^2 + 1 \geq 1 > 0$).

On en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $\left| \begin{array}{ll} u(x) = 2x + 3 & v(x) = x^2 + 1 \\ u'(x) = 2 & v'(x) = 2x \end{array} \right.$

$$f'(x) = \frac{(2)\left(x^2 + 1\right) - (2x)(2x + 3)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

on développe et on réduit le numérateur

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{\left(x^2 + 1\right)^2}) = -2\frac{x^2 + 3x - 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}}$$

(3) Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4x + 1}$.

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$ et $v(x) = 4x + 1$.

De plus : | u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$,

| $v(x) = 0 \iff x = -\dfrac{1}{4}$

On en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{4}\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{4x + 1}$$

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$, $v(x) = 4x + 1$, $u'(x) = 2x - 3$, $v'(x) = 4$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(4x + 1) - (4)\left(x^2 - 3x + 2\right)}{(4x + 1)^2}$$

on développe et on réduit le numérateur

soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 11}{(4x + 1)^2}}$

Remarque dans le cas d'un quotient, on ne développe pas le dénominateur. En effet, dans la suite on doit faire une étude du signe de la fonction dérivée, et le dénominateur de la fonction dérivée d'un quotient est un carré, donc toujours positif, c'est pour cela que c'est une mauvaise idée de le développer.