Chapitre 6 : Lois de probabilités discrètes - loi uniforme

1 Loi uniforme sur $[\![1 , n]\!]$

Notation

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

On note $[\![1 , n]\!] = \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$ *: il s'agit de l'intervalle qui regroupe l'ensemble des* ***entiers*** *compris entre* 1 *et n.*

Il ne faut pas le confondre avec $[1 , n]$ *qui est l'intervalle qui regroupe l'ensemble des* ***réels*** *compris entre* 1 *et n.*

Exemple :

- $[\![1 , 6]\!] = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$
- $[\![3 , 10]\!] = \{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$

Exercice 1

On jette un dé équilibré, et on considère la variable aléatoire X qui rapporte autant que le numéro qui apparaît.

1. *Décrire l'univers* Ω *de l'expérience aléatoire, puis l'univers* $X(\Omega)$ *de la variable aléatoire.*
2. *On note* $A_k = \{ \text{on obtient le numéro } k \text{ à l'issue du lancer} \}$. *Déterminer* $\mathbb{P}(A_k)$ *pour* $k \in [\![1 , 6]\!]$.
3. *Décrire l'événement* $[X = x_k]$. *En déduire* $\mathbb{P}[X = x_k]$ *pour* $k \in [\![1 , 6]\!]$.

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Dire que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur* $[\![1 , n]\!]$ *signifie que :*

- $[\![1 , n]\!]$ *constitue l'ensemble des valeurs prises par X, c'est à dire que* $X(\Omega) = [\![1 , n]\!]$,
- *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ *on a* $\boxed{\mathbb{P}[X = x_k] = \frac{1}{n}}$.

Dans ce cas, on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Exercice 2

On lance un dé équilibré et on désigne par X la variable aléatoire égale à 1 *si le numéro obtenu est impair, et* 2 *sinon.*
Montrer que X suit une loi uniforme.

L'univers de l'expérience aléatoire est $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$, et l'univers de la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \{ 1 , 2 \}$.

L'intervalle d'entiers $[\![1, 2]\!]$ constitue donc l'ensemble des valeurs prises par X, et donc, X suivra une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$ si et seulement si $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{2}$.

Or :
$\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}(\{$⚀, ⚂, ⚄$\}) = \mathbb{P}(\{$⚀$\}) + \mathbb{P}(\{$⚂$\}) + \mathbb{P}(\{$⚄$\}) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[X = 2] = \mathbb{P}(\{$⚁, ⚃, ⚅$\}) = \mathbb{P}(\{$⚁$\}) + \mathbb{P}(\{$⚃$\}) + \mathbb{P}(\{$⚅$\}) = \frac{1}{2}$

On en déduit donc que X suit une loi uniforme sur $[\![1 , 2]\!]$. ■

Exercice 3

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1 ; 10]\!])$.

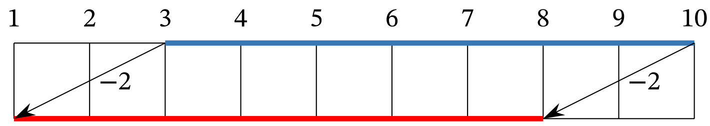
Calculer $\mathbb{P}[X = 4]$, $\mathbb{P}[X \geq 3]$, $\mathbb{P}[2 \leq X \leq 5]$, $\mathbb{P}[X \geq n]$, $\mathbb{P}[X \leq n]$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Puisque $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1 ; 10]\!])$ on a $\mathbb{P}[X = 4] = \dfrac{1}{10}$.

2. $\mathbb{P}[X \geq 3] = \mathbb{P}[X = 3] + \mathbb{P}[X = 4] + \ldots + \mathbb{P}[X = 10]$ et pour tout entier $k \in [\![1 ; 10]\!]$ on a $\mathbb{P}[X = k] = \dfrac{1}{10}$.

   On en déduit que $\mathbb{P}[X \geq 3] = 8 \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{5}$.

   Attention, entre 3 et 10 il y a 8 valeurs :

   Pour faire ce calcul de probabilité, on peut aussi passer par l'événement contraire :

$$\mathbb{P}[X \geq 3] = 1 - \mathbb{P}[X < 3] = 1 - \mathbb{P}[X = 1] - \mathbb{P}[X = 2] = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$$

3. $\mathbb{P}[2 \leq X \leq 5] = \mathbb{P}[X = 2] + \ldots + \mathbb{P}[X = 5] = 4 \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{5}$.

4. Il faut faire une disjonction de cas :

   - **1^er^ cas :** $1 \leq n \leq 10$. Alors $\mathbb{P}[X \leq n] = \mathbb{P}[X = 1] + \ldots + \mathbb{P}[X = n] = n \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{n}{10}$.

   - **2^e^ cas :** $n > 10$. Alors $\mathbb{P}[X \leq n] = \mathbb{P}[X = 1] + \ldots + \mathbb{P}[X = 10] + \underbrace{\ldots + \mathbb{P}[X = n]}_{=0 \text{ car impossible}} = 10 \times \dfrac{1}{10} = 1$.

   - **Bilan :** $\mathbb{P}[X \leq n] = \begin{cases} \dfrac{n}{10} & \text{si} \quad 1 \leq n \leq 10 \\ 1 & \text{si} \quad n > 10 \end{cases}$

5. Il faut faire une disjonction de cas :

   - **1$^{\text{er}}$ cas** : $1 \leq n \leq 10$. Alors $\mathbb{P}\left[\, X \geq n \,\right] = \mathbb{P}\left[\, X = n \,\right] + \ldots + \mathbb{P}\left[\, X = 10 \,\right] = \dfrac{10-n+1}{10} = \dfrac{11-n}{10}$.

   - **2$^{\text{e}}$ cas** : $n > 10$. Alors $\mathbb{P}\left[\, X \geq n \,\right] = 0$ car l'événement est impossible.

   - **Bilan** : $\mathbb{P}\left[\, X \leq n \,\right] = \begin{cases} \dfrac{11-n}{10} & \text{si} \quad 1 \leq n \leq 10 \\ 0 \quad \text{si} \quad n > 10 \end{cases}$

■

2 Espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme

Proposition 2

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![\, 1 \,,\, n \,]\!]$.

L'espérance mathématique de X est $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}}$.

Remarque : il s'agit en fait de la moyenne des termes extrêmes, c'est à dire de 1 et n.

Exercice 4

1. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur* $\left\{\, 0 \,,\, 1 \,,\, \ldots \,,\, n \,\right\}$*, où $n \in \mathbb{N}$. On suppose que* $\mathbb{E}(X) = 6$*. Déterminer n.*
2. *Même question si* $X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(\, [\![0, n]\!] \,\right)$.

1. $X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(\, [\![1, n]\!] \,\right)$ et $\mathbb{E}(X) = 6$ donc $\dfrac{n+1}{2} = 6$ **ssi** $n = 11$.
2. On passe par une variable aléatoire intermédiaire pour se ramener à une loi uniforme qui « démarre » à 1.

   On pose $Y = X + 1$: $X(\Omega) = \left\{\, 0 \,,\, 1 \,,\, \ldots \,,\, n \,\right\}$ donc $Y(\Omega) = \left\{\, 1 \,,\, 2 \,,\, \ldots \,,\, n+1 \,\right\}$. Ces deux univers possède le même nombre d'éléments, c'est à dire $n+1$, et on peut intuitivement admettre sans difficulté que $Y \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(\, [\![1, n+1]\!] \,\right)$.

   Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1+(n+1)}{2} = \dfrac{n+2}{2}$.

   Par ailleurs $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1)$ et on sait que pour tout réels a et b on a $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$. On en déduit donc que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \dfrac{n+2}{2} - 1 = \dfrac{n}{2}$.