Problème 1 Surréservation

ÉCONOMIE Branché

La plupart des transporteurs aériens utilisent le principe de vente lié à la surréservation, appelé « surbooking ».
En effet en vendant plus de billets pour un même vol, le prix de vente du billet sera moins élevé.
Cet argument commercial se base sur le pari qu'un nombre important de passagers ayant réservé ne se présentent pas au départ de leur vol (maladie, problème de connexion inter-vol, changement d'avis).
Ainsi pour éviter qu'un avion ne décolle avec plusieurs sièges inoccupés, la compagnie prend le risque de vendre plus de billets qu'il n'y a de sièges dans l'avion, avec le risque de devoir dédommager les passagers qui se verraient refuser l'accès à bord.

Deux questions se posent :
- Quels calculs les compagnies font-elles pour contrôler le surbooking ?
- Quelle est la stratégie la plus profitable pour la compagnie ? Combien de billets devra-t-elle vendre ?

PARTIE A Étude du risque de surréservation

Une compagnie aérienne a vendu 155 billets pour un vol.
La probabilité qu'un passager ayant acheté son billet ne se présente pas à l'embarquement est de 0,05.
On considère que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres.
On appelle X la variable aléatoire qui désigne le nombre de passagers se présentant à l'embarquement du vol.

1 a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Préciser la loi de probabilité suivie par X et donner ses paramètres.

2 Le vol prévu par la compagnie est assuré par un appareil du type A320 de capacité 150 passagers.
a. Calculer $P(X \leqslant 150)$. Interpréter ce résultat.

b. Déterminer la probabilité que la compagnie aérienne doive refuser au moins un passager.

c. À l'aide du résultat précédent expliquer le choix de la compagnie d'avoir recours à la surréservation.

PARTIE B Étude du gain

1 Dans cette question, la compagnie a vendu 153 billets à 200 euros.
Chaque passager se voyant refuser l'accès à bord reçoit 800 euros en compensation.
Soit G la variable aléatoire correspondant au gain de la compagnie. Compléter le tableau.

Nombre de passagers se présentant à l'embarquement	Inférieur ou égal à 150	151	152	153
Nombre de passagers à rembourser	0	1	2	3
Gain pour la compagnie	30 000	29 200		
Probabilité (au millième)	0,984			

2 À l'aide du tableau précédent calculer l'espérance de G. Interpréter.

3 Dans cette question, on considère que la compagnie a vendu n billets à 200 euros.
Le script python ci-dessous permet de calculer le gain espéré.

```python
from math import comb

def bin(n,k,p):
    return comb(n,k)*(p**k)*(1-p)**(n-k)

def cumul(nb_passagers,k,p):
    cumul = 0
    for i in range(k + 1):
        cumul = cumul + bin(nb_passagers,i,p)
    return cumul

def gainespere(nb_passagers,nb_places,p):
    E = nb_passagers*200*cumul(nb_passagers,nb_places,p)
    for i in range(1,nb_passagers-nb_places + 1):
            E = E + bin(nb_passagers,i + nb_places,p)*(nb_passagers*200-i*800)
    return nb_passagers,E
```

a. Que renvoie bin(n,k,p) ?

b. Que renvoie cumul(155,150,0.95) ?

4 a. Exécuter gainespere(nb_passagers,nb_places,p) pour toutes les valeurs de nb_passagers de 151 à 159 et compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de passagers	151	152	153	154	155	156	157	158	159
Gain									

b. Donner le nombre de billets que la compagnie doit vendre pour obtenir un gain maximal.

PARTIE A

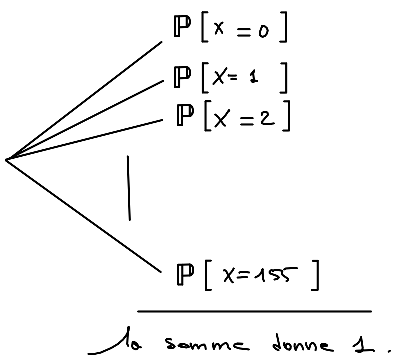
1a $X(\Omega) = [\![0\,;\,155]\!]$ X peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 155.

1b
- Epreuve de Bernoulli : vérifier la présence d'un passager à l'embarquement. On considère comme un succès le fait qu'un passager se présente, de probabilité $p = 0{,}95$.
- On répète cette épreuve de manière indépendante et identique ce qui constitue un schéma de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}95$ et $n = 155$.
- Comme X compte le nombre de succès, alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(155\,;\,0{,}95)$.

2a $\mathbb{P}[X \leqslant 150] \approx 0{,}89$ Binomfrep $(155, 0.95, 150)$

Il y a 89 % de chance qu'il y ait au plus 150 passagers qui se présentent à l'embarquement.

2b de façon générale $\mathbb{P}[X \leqslant b] + \mathbb{P}[X > b] = 1$



$\mathbb{P}[X > 150] = 1 - \mathbb{P}[X \leqslant 150] \approx 0{,}11$.

2c Il y a 11 % de chance qu'au moins un passager se présente en trop.

PARTIE B

1

Nombre de passagers se présentant à l'embarquement	Inférieur ou égal à 150	151	152	153
Nombre de passagers à rembourser	0	1	2	3
Gain pour la compagnie	30 600	29 800	29 000	28 200
Probabilité (au millième)	0,984	0,013	0,003	0,0004

- Nombre de passagers inférieur ou égal à 150
  - 153 billets à 200 € ont été vendus d'où un gain $G = 153 \times 200 = 30\,600$.
  - $\mathbb{P}[X \leq 150] = \sum_{k=0}^{150} \mathbb{P}[X = k]$

    On l'obtient par binomFrep $(153, 0.95, 150) \simeq 0,984$

- Nombre de passagers égal à 151
  - Gain $= 30600 - 800 = 29800$
  - $\mathbb{P}[X = 151] = 0,013$

    On l'obtient par binomFdp $(153, 0.95, 151)$

- $\mathbb{P}[X = 152] = 0,003$ et $\mathbb{P}[X = 153] = 0,0004$

nombre de valeurs prises par X.

2 Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}[X = x_k] \times x_k$

c'est ce qu'on peut espérer obtenir comme valeur pour X en moyenne

probabilité pour que X prenne la valeur x_k

valeur prise par X.

Ici la variable aléatoire est le gain G, et il peut prendre 4 valeurs au total :

$g_1 = 30\,600$, $g_2 = 29\,800$, $g_3 = 29\,000$ et $g_4 = 28\,200$

$$\boxed{X(G) = \{28\,200, 29\,000, 29\,800, 30\,600\}}$$ univers du gain.

Il faut donc savoir quels événements réalisent ces différents gains : c'est lié au nombre de passagers qui est décompté avec X.

- $\underbrace{[G = 28\,200] = [X = 153]}$ d'où $\boxed{\mathbb{P}[G = 28\,200] = \mathbb{P}[X = 153] = 0,0004}$

cela signifie qu'on réalise un gain de 28200 € quand l'événement X=153 est réalisé (153 personnes se sont présentées à l'embarquement).

- $[G = 29000] = [X = 152]$ j'ai $\boxed{\mathbb{P}[G = 29000] = \mathbb{P}[X = 152] = 0{,}003}$

- $[G = 29800] = [X = 151]$ j'ai $\boxed{\mathbb{P}[G = 29800] = \mathbb{P}[X = 151] = 0{,}013}$

- $[G = 30600] = [X = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ ou } \dots \text{ ou } X = 150]$

  le gain est de 30600 quand au plus 150 personnes se sont présentés à l'embarquement.

  $[G = 30600] = [X = 0] \cup [X = 1] \cup \dots \cup [X = 150]$

  et ces évènements sont 2 à 2 incompatibles

donc $\mathbb{P}[G = 30600] = \mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[X = 1] + \dots + \mathbb{P}[X = 150]$

$$\boxed{\mathbb{P}[G = 30600] = \mathbb{P}[X \leq 150] = 0{,}984}$$

■ Connaissant la loi de probabilité de la variable aléatoire G (le gain), on peut calculer son espérance :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}[X = g_k] \times g_k$$

$$= \mathbb{P}[X = g_1] \times g_1 + \mathbb{P}[X = g_1] \times g_1 + \mathbb{P}[X = g_1] \times g_1 + \mathbb{P}[X = g_1] \times g_1$$

$$= \mathbb{P}[X = 30600] \times 30600 + \mathbb{P}[X = 29800] \times 29800 + \mathbb{P}[X = 29000] \times 29000 + \mathbb{P}[X = 28200] \times 28200$$

$$= 0{,}984 \times 30600 + 0{,}013 \times 29800 + 0{,}003 \times 29000 + 0{,}0004 \times 28200$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 30596}$$

La compagnie aérienne peut ainsi espérer gagner 30596 € (en moyenne sur ce type de vol).