Chapitre 6 : Lois de probabilités discrètes - loi binomiale

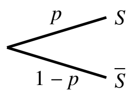
1 Loi de Bernoulli

1.1 Épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Définition 1 : épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues possibles. Par convention on nomme ces issues *succès* et *échec*.

L'issue associée à un succès est noté S et a pour probabilité $\mathbb{P}\left(S\right) = p$, tandis que l'issue associée à un échec se note $\overline{S}$ et a pour probabilité $\mathbb{P}\left(\overline{S}\right) = 1 - p$.



Définition 2

La loi de probabilité associé à une épreuve de Bernoulli est appelée *loi de Bernoulli de paramètre p* .

1.2 Schéma de Bernoulli

Définition 3 : expériences indépendantes

Deux expériences aléatoires sont dites indépendantes lorsqu'aucune des deux n'influence la réalisation de l'autre (ou autrement dit, le résultat de l'une n'influence pas le résultat de l'autre).

❑ **Exemple** : si on replace une boule dans son urne après un premier tirage, le tirage suivant sera indépendant du précédent, c'est à dire que le résultat du second tirage ne sera pas influencé par le premier. Par contre, si on ne replace pas la boule dans l'urne après le premier tirage, le résultat du second tirage sera influencé par le premier puisqu'il y a une boule qu'on ne peut plus tirer : les deux expériences aléatoires ne sont plus indépendantes.

Proposition 4

Quand une expérience aléatoire peut être répétée dans les mêmes conditions que les conditions initiales, alors ces expériences aléatoires sont toutes indépendantes.

Définition 5

Une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de manière *indépendante* une même épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un *schéma de Bernoulli de paramètre n et p*.

Exercice 1

À un jeu de fléchettes, on a 7 chances sur 10 d'atteindre la cible.

1. Expliquez pourquoi il s'agit d'une épreuve de Bernoulli ?
2. Construire l'arbre des probabilités (ou arbre pondéré) correspondant à trois épreuves successives, en indiquant tous les événements élémentaires.
3. Quel est l'univers Ω de cette expérience (expliciter Ω « en extension ») ?
4. On considère l'événement $A = \{$ l'archer atteint trois fois la cible $\}$. Expliciter A, puis calculer la probabilité d'avoir trois succès ?
5. On considère l'événement $B = \{$ l'archer atteint deux fois la cible $\}$. Expliciter B, puis calculer la probabilité de réalisation de B ?

Proposition 6 : règle d'additivité - principe multiplicatif

- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un *même nœud* est égal à 1.
- La probabilité d'un événement élémentaire est le *produit* des probabilités associées aux branches qui mènent à cet événement.

Définition 7

Dans un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ le nombre de chemins sur lesquels on trouve k succès à l'issue des n épreuves.

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est appelé coefficient binomial et se lit « k parmi n ». Par convention on pose $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

Proposition 8 : propriétés des coefficients binomiaux

- Pour tout entier naturel $n \geq 0$, $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$.
- Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ (prop. de symétrie).
- Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n-1$, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$ (prop. d'addition).

- **Triangle de Pascal** : le triangle de Pascal permet de retrouver très rapidement les valeurs des coefficients binomiaux.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
7	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$

2 Loi binomiale

Proposition 9

Dans un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au cours des n épreuves de Bernoulli a pour loi de probabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}[\, X = k \,] = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k \, (1-p)^{n-k} \qquad \text{avec } k \in [\![\, 1 \, , \, n \,]\!]}$$

On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètre n et p : $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Proposition 10 : espérance, variance et écart-type

Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p :

- son espérance mathématique est $\boxed{E(X) = np}$;
- sa variance est $\boxed{V(X) = np(1-p)}$;
- son écart type est $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

- **Exemple «théorique»** : on considère un schéma de Bernoulli. Un tel schéma est constitué de la succession de plusieurs épreuves de Bernoulli, une épreuve de Bernoulli étant une épreuve qui n'a que deux issues possibles : un succès ou un échec. On note p la probabilité d'avoir un succès et $q = 1 - p$ celle d'avoir un échec.

1. Cas $n = 1$:

   il n'y a qu'une épreuve, chaque événement élémentaire correspond donc à un résultat. La loi binomiale est $\mathscr{B}(1;p)$

   - $\{X = 0\} = \left\{\overline{S}\right\}$ soit $p\left(\{X = 0\}\right) = q$
   - $\{X = 1\} = \left\{S\right\}$ soit $p\left(\{X = 1\}\right) = p$

   La probabilité d'avoir un succès est et celle de l'échec est $p(X = 0) = q$

2. Cas $n = 2$:

   il y a deux épreuves, chaque événement élémentaire correspond donc à un couple de résultat. La loi binomiale est $\mathscr{B}(2;p)$

   - $\{X = 0\} = \left\{(\overline{S}, \overline{S})\right\}$ soit $p\left(\{X = 0\}\right) = q^2$
   - $\{X = 1\} = \left\{(S, \overline{S}), (\overline{S}, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 1\}\right) = pq + qp = 2pq$
   - $\{X = 2\} = \left\{(S, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 2\}\right) = p^2 = p^2$

3. Cas $n = 3$:

   il y a trois épreuves, chaque événement élémentaire correspond donc à un triplet de résultat. La loi binomiale est $\mathscr{B}(3;p)$

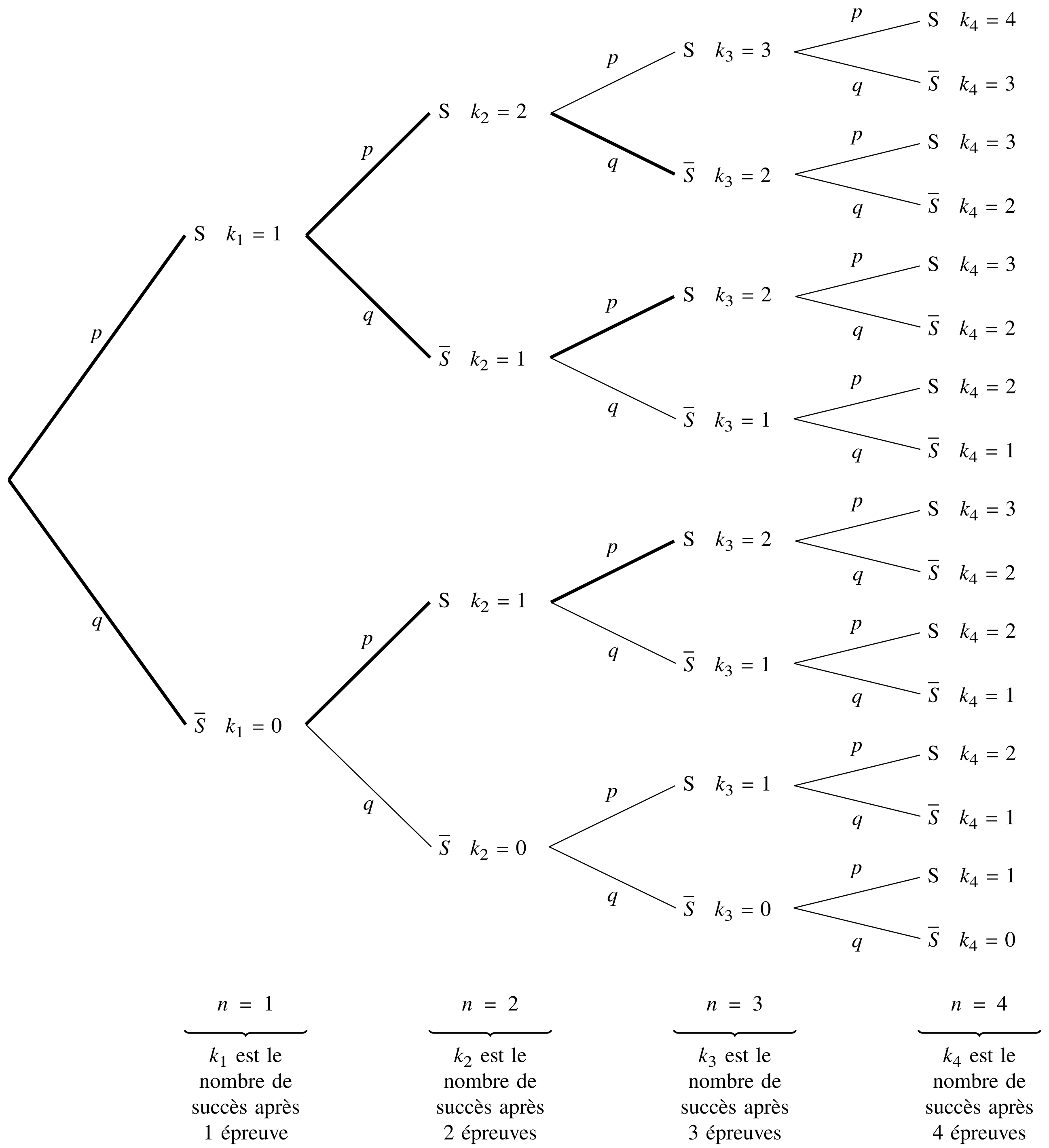
   - $\{X = 0\} = \left\{(\overline{S}, \overline{S}, \overline{S})\right\}$ soit $p\left(\{X = 0\}\right) = q^3$
   - $\{X = 1\} = \left\{(S, \overline{S}, \overline{S}), (\overline{S}, S, \overline{S}), (\overline{S}, \overline{S}, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 1\}\right) = pq^2 + qpq + q^2p = 3pq^2$
   - $\{X = 2\} = \left\{(S, S, \overline{S}), (S, \overline{S}, S), (\overline{S}, S, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 2\}\right) = p^2q + pqp + qp^2 = 3p^2q$
   - $\{X = 3\} = \left\{(S, S, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 3\}\right) = p^3$

4. Cas $n = 4$:

   il y a quatre épreuves, chaque événement élémentaire correspond donc à un quadruplet de résultat. La loi binomiale est $\mathscr{B}(4;p)$

   - $\{X = 0\} = \left\{(\overline{S}, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S})\right\}$ soit $p\left(\{X = 0\}\right) = q^4$
   - $\{X = 1\} = \left\{(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S}), (\overline{S}, S, \overline{S}, \overline{S}), (\overline{S}, \overline{S}, S, \overline{S}), (\overline{S}, \overline{S}, \overline{S}, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 1\}\right) = pq^3 + qpq^2 + q^2pq + q^3p = 4pq^3$
   - $\{X = 2\} = \left\{(S, S, \overline{S}), (S, \overline{S}, S), (\overline{S}, S, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 2\}\right) = p^2q^2 + pqpq + pqqp + qp^2q + qpqp + q^2p^2 = 6p^2q^3$
   - $\{X = 3\} = \left\{(S, S, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 3\}\right) = p^3q + p^2pq + pqp^2 + qp^3 = 4p^3q$
   - $\{X = 4\} = \left\{(S, S, S, S)\right\}$ soit $p\left(\{X = 4\}\right) = p^4$

Tournez la page pour voir le schéma des arbres pondérés.


p
q
S $k_1 = 1$
$\overline{S}$ $k_1 = 0$
S $k_2 = 2$
$\overline{S}$ $k_2 = 1$
S $k_2 = 1$
$\overline{S}$ $k_2 = 0$
S $k_3 = 3$
$\overline{S}$ $k_3 = 2$
S $k_3 = 2$
$\overline{S}$ $k_3 = 1$
S $k_3 = 2$
$\overline{S}$ $k_3 = 1$
S $k_3 = 1$
$\overline{S}$ $k_3 = 0$
S $k_4 = 4$
$\overline{S}$ $k_4 = 3$
S $k_4 = 3$
$\overline{S}$ $k_4 = 2$
S $k_4 = 3$
$\overline{S}$ $k_4 = 2$
S $k_4 = 2$
$\overline{S}$ $k_4 = 1$
S $k_4 = 3$
$\overline{S}$ $k_4 = 2$
S $k_4 = 2$
$\overline{S}$ $k_4 = 1$
S $k_4 = 2$
$\overline{S}$ $k_4 = 1$
S $k_4 = 1$
$\overline{S}$ $k_4 = 0$
$n = 1$
k_1 est le nombre de succès après 1 épreuve
$n = 2$
k_2 est le nombre de succès après 2 épreuves
$n = 3$
k_3 est le nombre de succès après 3 épreuves
$n = 4$
k_4 est le nombre de succès après 4 épreuves