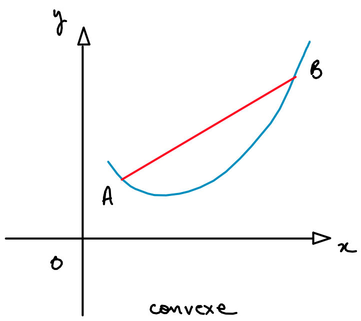
CONVEXITE

Définition

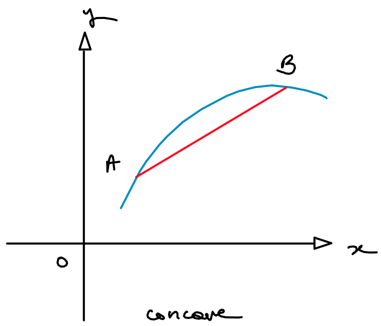
Une fonction f est convexe si pour tout réels a et b de I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours située en-dessous de la sécante $[AB]$ avec $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$.

Pour une fonction concave : remplacer " au-dessous " par " au-dessus "

Illustration



convexe



concave

Définition dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur I, et f' sa fonction dérivée.

Si f' est dérivable sur I, on note sa fonction dérivée f''.

$$\forall x \in I, \quad \left(f'(x)\right)' = f''(x)$$

Exemple

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

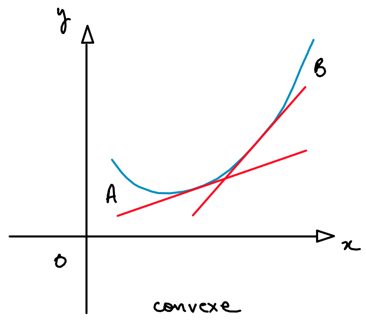
$$f''(x) = 6x - 8$$

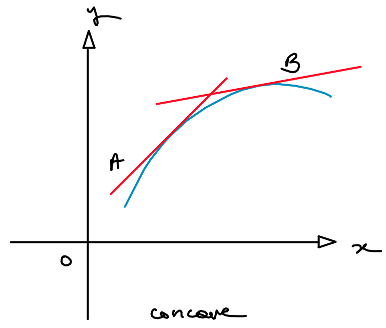
Proposition convexité et tangente

Une fonction f est convexe sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Pour une fonction concave : remplacer " au-dessus " par " au-dessous "

Illustration





Proposition

Sur un intervalle I.

- Une fonction f est convexe ssi $f'' > 0$ ssi f' est croissante
- Une fonction f est concave ssi $f'' < 0$ ssi f' est décroissante

Exemple Etudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 16x + 5$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynomiale.

$f'(x) = x^2 - 8x - 16$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f' est une fonction polynomiale

$f''(x) = 2x - 8 = 2(x-4)$.

Or $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 4$ avec égalité si $x = 4$.

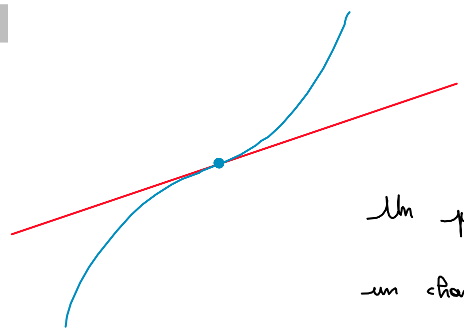
$f''(x) < 0$ ssi $x < 4$.

On en déduit que f est convexe sur $[4, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 4]$.

Définition point d'infexion

$A(a\,;\,f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en A et si $\mathcal{C}_f$ traverse cette tangente en A.

Illustration



Un point d'inflexion indique un changement de convexité.

Proposition

Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a.

Exemple La fonction précédente présente un point d'inflexion en $x = 4$.

f'' s'annule en changeant de signe en $x = 4$.

21 CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x^2 e^x.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. En traçant la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice ou avec un logiciel de géométrie, conjecturer la convexité de la fonction f et l'existence d'éventuels points d'inflexion.

2. Montrer que $f'(x) = 5x(x+2)e^x$ et que :

$$f''(x) = 5(x^2 + 4x + 2)e^x.$$

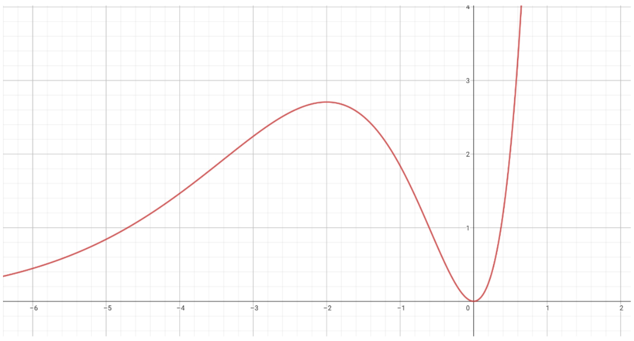
3. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet. On admet que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

4. a. Étudier le signe du trinôme $x^2 + 4x + 2$.

b. En déduire le signe de $f''(x)$.

c. Retrouver les résultats conjecturés à la question 1.



1 Il y a un point d'inflexion dans l'intervalle $[-2 ; 0]$

2 On a $f = 5uv$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$

donc $f' = 5(u'v + v'u)$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

Ainsi $f'(x) = 5\left(2x e^x + x^2\right)e^x$ soit $\boxed{f'(x) = 5x(x+2)e^x}$

Pour calculer $f''(x)$, il est intéressant de développer $f'(x)$

$f'(x) = 5(x^2 + 2x)e^x$ donc $f' = 5uv$ avec $u(x) = x^2 + 2x$ et $v(x) = e^x$

Ainsi $f' = 5(u'v + v'u)$ avec $u'(x) = 2x + 2$ et $v'(x) = e^x$

et $f''(x) = 5\left((2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x\right)$

soit $\boxed{f''(x) = 5(x^2 + 4x + 2)e^x}$

3a Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x(x+2)$.

3b

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$20/e^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0$ et $f(-2) = \dfrac{20}{e^2}$

Par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4a $x^2 + 4x + 2$ est un trinôme du 2^d degré de discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$

et donc ce trinôme admet deux racines x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2} \quad \text{avec } \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

soit $\boxed{x_1 = -2-\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -2+\sqrt{2}}$

4b On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
convexité		convexe		concave		convexe	

point d'inflexion

4c f'' s'annule en changeant de signe pour $x = -2-\sqrt{2}$ ce qui montre que f admet un point d'inflexion en $-2-\sqrt{2}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.
3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. a. Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Soit f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

1a $\quad e^1 = e$ et $x - 1 \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

1b $\quad$ On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en $x = 1$.

2 $\quad e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$ et $x - 1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ donc par quotient on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- .$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$.

3a $\quad$ Soit $x \in]-\infty, 1[$

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x - 1$.

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{avec} \quad u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2}$ soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}}$

3b $\quad$ Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a $e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x - 2$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	‖
f	0^-	↘	$-\infty$ ‖

f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$

4a $\quad f''(x) = \dfrac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$

Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a :

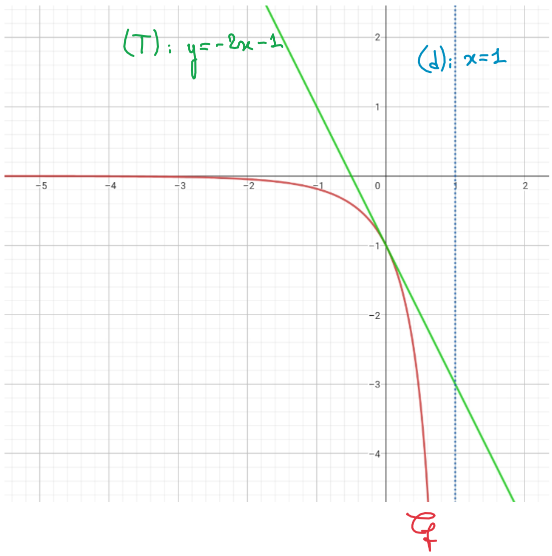
- $e^x > 0$
- $x - 1 < 0$ et donc $(x-1)^3 < 0$

Le signe de $f''(x)$ dépend donc du signe de x^2-4x+5.

Or x^2-4x+5 est un trinôme du 2^d degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 20 = -4 < 0$ ce qui permet d'en déduire que pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$, $x^2-4x+5 > 0$ puisque le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Ainsi, par produit et quotient, pour tout réel $x \in \left]-\infty, 1\right[$ on a $f''(x) < 0$.

f est donc concave sur $\left]-\infty, 1\right[$.



4b L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Or $f'(0) = -2$ et $f(0) = -1$ donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $\boxed{y = -2x - 1}$

4c La courbe $\mathcal{C}_f$ est concave, donc elle est au-dessous de chacune de ses tangentes pour tout $x \in \left]-\infty ; 1\right[$.

En particulier, cela se traduit algébriquement en 0 par

$$f(x) \leqslant -2x - 1 \quad \text{soit} \quad \frac{e^x}{x-1} \leqslant -2x - 1$$

et $\boxed{e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)}$ puisque $x - 1 < 0$ sur $\left]-\infty ; 1\right[$.

5a La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty ; 1\right[$ et -2 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $\left]-\infty ; 1\right[$.

5b

Graph1 Graph2 Graph3

$Y_1 = e^X/(X-1)$

CONFIG TABLE
DébutTbl=0
ΔTbl=0.1
Indpnt : [redacted] Demande
Dépndte : Auto Demande

X	Y_1
0	-1
0.1	-1.228
0.2	-1.527
0.3	-1.928
0.4	-2.486
0.5	-3.297
0.6	-4.555
0.7	-6.713
0.8	-11.13
0.9	-24.6
1	ERREUR

CONFIG TABLE
DébutTbl=0
ΔTbl=0.01
Indpnt : Auto Demande
Dépndte : Auto Demande

X	Y_1
0.26	-1.753
0.27	-1.794
0.28	-1.838
0.29	-1.882
0.3	-1.928
0.31	-1.976
0.32	-2.025
0.33	-2.076
0.34	-2.129
0.35	-2.183
0.36	-2.24

On constate que $0,31 < \alpha < 0,32$