

Factoriser un polynôme du second degré connaissant une de ses racines.

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).
- Il y a équivalence entre toutes ces assertions.

$$r_1 \text{ racine de } f \Leftrightarrow r_1 \text{ solution de } f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 \text{ antécédent de } 0 \text{ par } f$$

$$\Leftrightarrow f(r_1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow f(x) \text{ est factorisable par } x - r_1 \text{ et le second facteur est une fonction affine}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } d \text{ tel que}$$

$$f(x) = (x - r_1)(ax + d)$$

- Déterminer la valeur de d .

r_1 est une racine de f donc il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que

$f(x) = (x - r_1)(ax + d)$. Développons :

$$f(x) = ax^2 + (d - ar_1)x - r_1d$$

et par ailleurs $f(x) = ax^2 + bx + c$

On en déduit que (par identification) $d - ar_1 = b$ et $-r_1d = c$

soit $d = b + ar_1$ et $d = \frac{-c}{r_1}$

On a donc deux choix possibles pour trouver la valeur de d : le plus simple étant le second.

$$f(x) = (x - r_1)(ax + d) = \begin{array}{l} \text{terme de} \\ \text{degré 2} \end{array} + \begin{array}{l} \text{terme de} \\ \text{degré 1} \end{array} + \begin{array}{l} (-r_1d) \\ \text{terme} \\ \text{constant} \end{array}$$

Ce terme constant, c'est le réel c !

Exemple

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

- On peut remarquer que 3 est une racine de f . En effet :

$$f(3) = 2 \times 3^2 - 5 \times 3 - 3 = 18 - 15 - 3 = 0.$$

- f est donc factorisable par $x-3$, et il existe un réel d tel que $f(x) = (x-3)(2x+d)$.

En développant cette expression puis on la compare avec l'expression de départ, on aboutit à $-3d = -3$ soit $d = 1$.

$$\text{Ainsi } f(x) = (x-3)(2x+1) = (x-3)2\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

- La seconde racine de f est la solution de $2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Elle se lit aussi en écrivant que $2x+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ qui s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$.

- Conclusion : $f(x) = 0$ si $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$

- La forme canonique de f est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$

Donc $f(x) = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 + \beta$. Pour déterminer β on peut écrire que $\beta = f(x)$ ou alors on développe :

$$f(x) = \begin{array}{l} \text{terme de} \\ \text{degré 2} \end{array} + \begin{array}{l} \text{terme de} \\ \text{degré 1} \end{array} + 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \beta$$

$$\text{Par comparaison on a } 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = -3 - 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{49}{8}$$

$$\text{La forme canonique de } f \text{ est } f(x) = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

Exemple $f(x) = x^2 - 5x + 6$

- On peut remarquer que 2 est une racine de f . En effet :

$$f(2) = 4 - 10 + 6 = 0$$

- f est donc factorisable par $x - 2$, et il existe un réel d tel que $f(x) = (x - 2)(x + d)$.

En développant cette expression puis on la compare avec l'expression de départ, on aboutit à $-2d = 6$ soit $d = -3$

Ainsi $f(x) = (x - 2)(x - 3)$

- La seconde racine de f est la solution de $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

- Conclusion : $f(x) = 0$ si $x \in \{2; 3\}$

- La forme canonique de f est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$

Donc $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \beta$. Pour déterminer β on peut écrire que $\beta = f(x)$ ou alors on développe :

$$f(x) = \begin{array}{c} \text{terme de} \\ \text{degré 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{terme de} \\ \text{degré 1} \end{array} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \beta$$

Par comparaison on a $\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

La forme canonique de f est $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 11x + 10$

On constate que $f(2) = 0$ car $3 \times 2^2 - 11 \times 2 + 10 = 12 - 22 + 10 = 0$.

Ainsi, il existe un réel d tel que $f(x) = (x-2)(3x+d)$

avec $-2d = 10$ soit $d = -5$.

Conclusion : $f(x) = (x-2)(3x-5) = (x-2) \times 3 \times \left(\frac{3x-5}{3}\right)$

$$f(x) = 3(x-2)\left(x - \frac{5}{3}\right)$$

et donc la 2^{de} racine de f est $r_2 = \frac{5}{3}$.

On a $f(2) = 3 \times 2^2 - 11 \times 2 + 10 = 12 - 22 + 10 = 0$ donc 2 est une racine de f . Ainsi, il existe un réel d tel que :

$$f(x) = (x-r_1)(ax+d) = (x-2)(3x+d)$$

Avec : $-2d = 10$ soit $d = -5$

Conclusion : $f(x) = (x-2)(3x-5) = (x-2) \times 3 \left(x - \frac{5}{3}\right)$

$$\text{Soit } f(x) = 3(x-2)\left(x - \frac{5}{3}\right)$$

Exercice : $f(x) = 3x^2 - 5x - 28$

On a $f(4) = 3 \times 4^2 - 5 \times 4 - 28 = 48 - 20 - 28 = 0$ donc 4 est une racine de f et il existe un réel d tel que

$$f(x) = (x-4)(3x+d) \text{ avec } -4d = -28 \text{ soit } d = 7.$$

Conclusion: $f(x) = (x-4)(3x+7) = 3(x-4)(x+\frac{7}{3})$

et la 2^{de} racine de f est $r_2 = -\frac{7}{3}$

Forme canonique: $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}$ et $\beta = f(\frac{5}{6}) = -\frac{361}{12}$

Ainsi: f peut "se voir" sous trois formes:

la forme développée (FD) $f(x) = 3x^2 - 5x - 28$

la forme canonique (FC) $f(x) = 3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{361}{12}$

la forme factorisée (FF) $f(x) = 3(x-4)(x+\frac{7}{3})$

• Pour résoudre $f(x) = -28 \rightarrow$ FD

$$f(x) = -28 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 28 = -28 \Leftrightarrow x(3x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{5}{3}\}$$

• Pour résoudre $f(x) = -\frac{361}{12} \rightarrow$ FC

$$f(x) = -\frac{361}{12} \Leftrightarrow 3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{361}{12} = -\frac{361}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

• Pour calculer $f(4) \rightarrow$ FF

$$f(4) = 3(4-4)(4+\frac{7}{3}) = 0$$

Résumé

Soit f un trinôme donné sous forme développée: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pour résoudre $f(x) = 0$, deux stratégies:

(a) Avec la forme canonique

- on met f sous forme canonique :

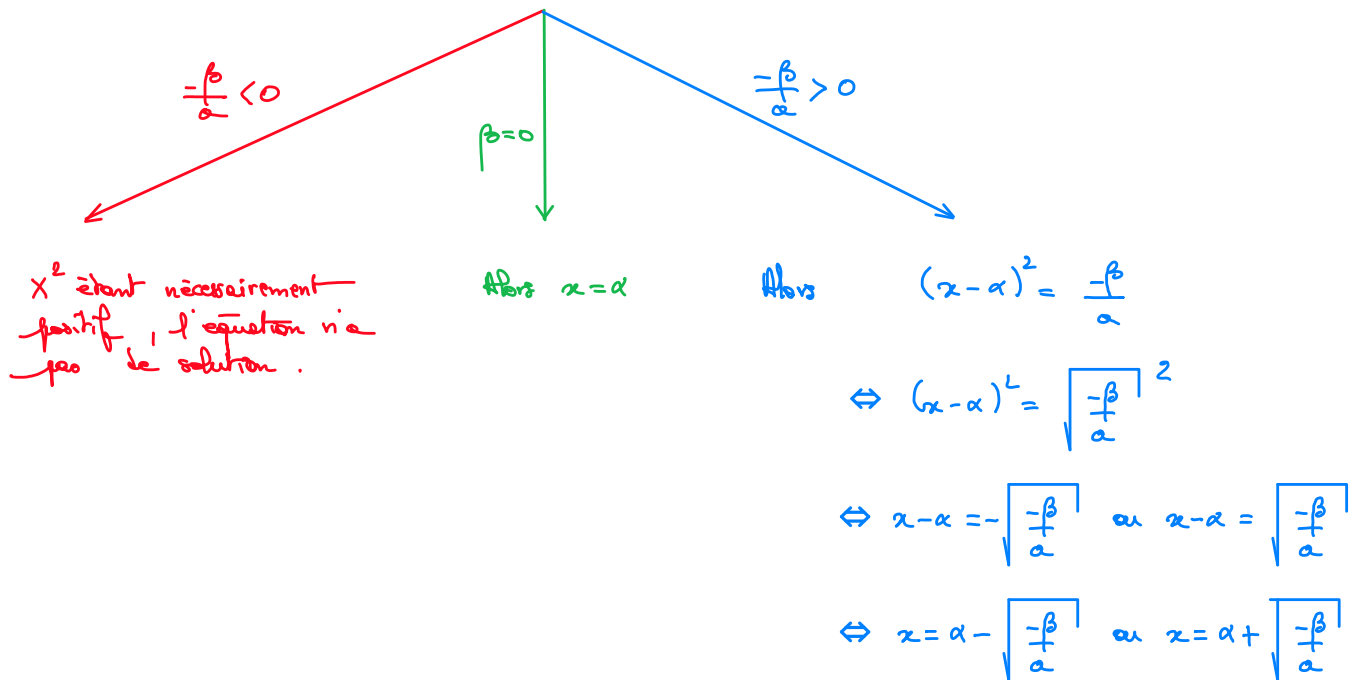
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

- $f(x) = 0$ nous ramène à une équation du type $x^2 = k$.

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = \frac{-\beta}{a}$$



Rappel : $x^2 = k$ avec $k \geq 0$.

$x^2 = k$		$k = \sqrt{k}^2$ valide car $k \geq 0$
$x^2 = \sqrt{k}^2$		$-\sqrt{k}^2$
$x^2 - \sqrt{k}^2 = 0$		identité remarquable
$x - \sqrt{k} \quad x + \sqrt{k} = 0$		
$x = \sqrt{k} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{k}$		

ce qui est finalement assez "naturel" :

$$x^2 = a^2$$

a convient car alors $x^2 = a^2$

l'opposé $-a$ convient aussi car $x^2 = (-a)^2 = a^2$

Un nombre et son opposé ont le même carré.

(b) Avec la forme factorisée.

Si on connaît une racine r_1 (déterminée avec la calculatrice par exemple), alors :

$$f(x) = (x - r_1)(ax + d) \quad \text{avec} \quad -r_1 d = c \quad \text{soit} \quad d = \frac{-c}{r_1}$$

$$\text{d'où} \quad f(x) = (x - r_1)(ax + d) \\ = (x - r_1)\left(ax - \frac{c}{r_1}\right)$$

$$= a \left(x - r_1\right) \left(x - \frac{c}{ar_1}\right)$$

$$= a(x - r_1)(x - r_2) \quad \text{en posant} \quad r_2 = \frac{c}{ar_1}$$

c'est un nombre qui
est donc connu car
on connaît c et r_1

à ne pas apprendre !
Il vaut mieux comprendre
le calcul

Exemple concret : $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$

$f(-1) = 0$ donc -1 racine de f .

$$f(x) = (x + 1)(2x + d) \quad \text{et} \quad 1 \times d = 3 \quad \text{soit} \quad d = 3$$

$$f(x) = (x + 1)(2x + 3)$$

$$f(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad \text{donc} \quad r_2 = -\frac{3}{2}$$

on remarque que effectivement $\frac{c}{ar_1} = \frac{3}{2 \times (-1)} = -\frac{3}{2}$