Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$

## Forme canonique

- Par un calcul avec la complétion du carré :

| | |
|---|---|
| $5x^2 - 4x + 2$ | factorisation par 5 des termes variables. |
| $= 5\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) + 2$ | $x^2 - 2px = (x-p)^2 - p^2$ avec $2p = \frac{4}{5} \Leftrightarrow p = \frac{2}{5}$ |
| $= 5\left(\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) + 2$ | on développe. |
| $= 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2$ | $-5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = -5 \times \frac{2^2}{5^2} = -\frac{4}{5}$ |
| $= 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} + 2$ | $-\frac{4}{5} + 2 = \frac{6}{5}$ |
| $= 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{6}{5}$ | |

- En déterminant les coordonnées du sommet de la parabole : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \times 5} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

## Forme factorisée

Il faut chercher les racines. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{6}{25} \quad \text{et} \quad -\frac{6}{25} < 0$$

donc $f$ n'a pas de racines ce qui indique que $f$ ne possède pas de forme factorisée.

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$

## Forme canonique

- Par un calcul avec la complétion du carré :

$$-\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$$

factorisation par $-\frac{3}{2}$ des termes variables.

$$= -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + \frac{1}{3}$$

$x^2 - 2px = (x-p)^2 - p^2$ avec $2p = \frac{4}{3} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$

$$= -\frac{3}{2}\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3}$$

on développe.

$$= -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\cancel{3} \times 2^{\cancel{2}}}{\cancel{2} \times 3^{\cancel{2}}} = \frac{2}{3}$

$$= -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

- En déterminant les coordonnées du sommet de la parabole : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

## Forme factorisée

Il faut chercher les racines. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc $f(x) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + \pi x + 3$

## Forme canonique

- Par un calcul avec la complétion du carré :

$$2x^2 + \pi x + 3$$

factorisation par 2 des termes variables.

$$= 2\left(x^2 + \frac{\pi}{2}x\right) + 3$$

$x^2 + 2px = (x+p)^2 - p^2$ avec $2p = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow p = \frac{\pi}{4}$

$$= 2\left(\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) + 3$$

on développe.

$$= 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\,\frac{\pi^2}{16} + 3$$

$2\,\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}$

$$= 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{8} + 3$$

$-\frac{\pi^2}{8} + 3 = \frac{24 - \pi^2}{8}$

$$= 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{24 - \pi^2}{8}$$

- En déterminant les coordonnées du sommet de la parabole : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-\pi}{4}$ et $\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$$\beta = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{-\pi}{4}\right) + 3$$

$$= 2\,\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{4} + 3$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{2\pi^2}{8} + \frac{24}{8}$$

$$\beta = \frac{24 - \pi^2}{8} > 0$$

## Forme factorisée

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{24 - \pi^2}{8} > 0$

donc l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution : $f$ n'est pas factorisable.

Exercice : déterminer les formes canoniques et factorisées

- $f(x) = -3x^2 - 4x + 7$

$$= -3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + 7$$

$$= -3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] + 7$$

$$= -3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 7$$

$$\boxed{f(x) = -3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{25}{3}}$$

on constate que a et $\beta$ sont de signes contraires, la factorisation est possible.

$$= -3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right]$$

$$= -3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2\right]$$

$$= -3\left(x+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{f(x) = -3(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)}$$

- factorisation par $-3$ sur les termes variables.
- $x^2 + 2px = (x-p)^2 - p^2$ avec $2p = \frac{4}{3} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$
- on développe
- $\frac{4}{3} + 7 = \frac{4}{3} + \frac{21}{3} = \frac{25}{3}$
- cette forme canonique permet de donner immédiatement $\alpha$ et $\beta$ qui sont les coordonnées du sommet de la parabole. Pour obtenir la forme factorisée il faut à nouveau factoriser par $-3$.

$\frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -1$ et $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

On peut tout factoriser par $-3$ dès le départ.

$f(x) = -3x^2 - 4x + 7$

$$= -3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right)$$

$$= -3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}\right]$$

$$= -3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right]$$

On peut ensuite factoriser comme précédemment.

- factorisation par $-3$.
- $x^2 - 2px = (x-p)^2 - p^2$ avec $2p = \frac{4}{3} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$
- $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{9}\ \frac{21}{9} = \frac{-25}{9}$
- on obtient la forme canonique $a\left((x-\alpha)^2 + \gamma\right)$ au lieu de $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- $f(x) = 7x^2 + 2x + 1$

| | |
|---|---|
| $f(x) = 7x^2+2x+1$ | factorisation par 7 des termes variables. |
| $= 7\left(x^2+\frac{2}{7}x\right)+1$ | $x^2+2px=(x-p)^2-p^2$ avec $2p=\frac{2}{7} \Leftrightarrow p=\frac{1}{7}$ |
| $= 7\left[\left(x+\frac{1}{7}\right)^2-\left(\frac{1}{7}\right)^2\right]+1$ | on développe |
| $= 7\left(x+\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{7}+1$ | $-\frac{1}{7}+1=\frac{6}{7}$ |
| $= 7\left(x+\frac{1}{7}\right)^2+\frac{6}{7}$ | |

On ne peut pas factoriser cette expression car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

En factorisant dès le départ par 7 :

$$f(x) = 7x^2+2x+1$$

$$= 7\left(x^2+\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}\right)$$

$$= 7\left[\left(x+\frac{1}{7}\right)^2-\left(\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{7}\right]$$

$$= 7\left[\left(x+\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{49}+\frac{7}{49}\right]$$

$f(x) = 7\left[\left(x+\frac{1}{7}\right)^2+\frac{6}{49}\right]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ donc pas de factorisation possible.

- $f(x) = (x+1)^2 - 3x + 2$

| | |
|---|---|
| $f(x) = (x+1)^2-3x+2$ | on développe |
| $= x^2+2x+1-3x+2$ | on réduit |
| $= x^2-x+3$ | $x^2-2px=(x-p)^2-p^2$ avec $2p=-1 \Leftrightarrow p=-\frac{1}{2}$ |
| $= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3$ | $-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=-\frac{1}{4}+\frac{12}{4}=\frac{11}{4}$ |
| $f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$ | |

On ne peut pas factoriser cette expression car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

- $f(x) = 3x^2 - 11x - 8$

$$= 3\left[x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{8}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \frac{8}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{121}{36} - \frac{96}{36}\right]$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{217}{36}\right] = 3\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{217}{12}$$

les deux formes canoniques que l'on peut écrire mais la 2de donne α et β.

$$= 3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{217}}{6}\right)^2\right]$$

$$= 3\left(x - \frac{11}{6} - \frac{\sqrt{217}}{6}\right)\left(x - \frac{11}{6} + \frac{\sqrt{217}}{6}\right)$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{11 + \sqrt{217}}{6}\right)\left(x - \frac{11 - \sqrt{217}}{6}\right)$$

forme factorisée de f.