

Factoriser un polynôme du second degré connaissant une de ses racines



Exercice corrigé 1

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $4x^2 + 2x - 3 = 0$.

1. Déterminer une forme canonique de f .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de votre choix.
3. f est-elle factorisable ? Si oui, déterminer en une forme factorisée.
4. Étudier le signe et les variations de f par la méthode de votre choix.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -3$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -\frac{13}{4}$.

1. Après calcul, on détermine que $f(x) = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{4}$.

2. (a) En utilisant le discriminant :

on reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 52 > 0$, et donc cette équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2 avec : $x_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{13} - \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}\sqrt{13} - \frac{1}{4}$.

(b) En utilisant la forme canonique :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ alors : } f(x) = 0 \quad \text{ssi} \quad 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\text{ssi} \quad 4\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{16}\right] = 0$$

$$\text{ssi} \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{16} = 0$$

$$\text{ssi} \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{13}{16}}\right)^2 = 0$$

$$\text{ssi} \quad \left(x + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{13}{16}}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{13}{16}}\right) = 0$$

$$\text{ssi} \quad x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{13} = 0$$

$$\text{ssi} \quad x = \frac{1}{4}\sqrt{13} - \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4}\sqrt{13} - \frac{1}{4}$$

3. $f(x)$ est factorisable : $f(x) = 4\left(x + \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{1}{4}\right)$.

4. Le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}\sqrt{13}-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{13}-\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-	0	+
f	$+\infty$					$+\infty$

5. Solution de l'équation $f(x) = -3$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -3$ **ssi** $4x^2 + 2x - 3 = -3$

ssi $4x^2 + 2x = 0$

ssi $x(4x + 2) = 0$

ssi $x = 0$ ou $4x + 2 = 0$

ssi $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

6. Solution de l'équation $f(x) = -\frac{13}{4}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -\frac{13}{4}$ **ssi** $4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{4} = -\frac{13}{4}$

ssi $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 0$

ssi $x = -\frac{1}{4}$

Exercice corrigé 2

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $x^2 + 2x - 5 = 0$.

1. Déterminer une forme canonique de f .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de votre choix.
3. f est-elle factorisable ? Si oui, déterminer en une forme factorisée.
4. Étudier le signe et les variations de f par la méthode de votre choix.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -5$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -6$.

1. Après calcul, on détermine que $f(x) = (x + 1)^2 - 6$.

2. (a) En utilisant le discriminant :

on reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 24 > 0$, et donc cette équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2 avec : $x_1 = -\sqrt{6} - 1$ et $x_2 = \sqrt{6} - 1$.

(b) En utilisant la forme canonique :

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = 0$ **ssi** $(x + 1)^2 - 6 = 0$

ssi $(x + 1)^2 - (\sqrt{6})^2 = 0$

ssi $(x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6}) = 0$

ssi $x + 1 - \sqrt{6} = 0$ ou $x + 1 + \sqrt{6} = 0$

ssi $x = \sqrt{6} - 1$ ou $x = -\sqrt{6} - 1$

3. $f(x)$ est factorisable : $f(x) = (x + \sqrt{6} + 1)(x - \sqrt{6} + 1)$.

4. Le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}-1$	-1	$\sqrt{6}-1$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$					$+\infty$

5. Solution de l'équation $f(x) = -5$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -5$ **ssi** $x^2 + 2x - 5 = -5$

ssi $x^2 + 2x = 0$

ssi $x(x + 2) = 0$

ssi $x = 0$ ou $x + 2 = 0$

ssi $x = 0$ ou $x = -2$

6. Solution de l'équation $f(x) = -6$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -6$ **ssi** $(x + 1)^2 - 6 = -6$

ssi $(x + 1)^2 = 0$

ssi $x = -1$

Exercice corrigé 3

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $2x^2 - 4 = 0$.

1. Déterminer une forme canonique de f .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de votre choix.
3. f est-elle factorisable ? Si oui, déterminer en une forme factorisée.
4. Étudier le signe et les variations de f par la méthode de votre choix.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -4$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -4$.

1. Après calcul, on détermine que $f(x) = 2(x)^2 - 4$.

2. (a) En utilisant le discriminant :

on reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 32 > 0$, et donc cette équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2 avec : $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$.

(b) En utilisant la forme canonique :

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = 0$ ssi $2(x)^2 - 4 = 0$

$$\text{ssi } 2[(x)^2 - 2] = 0$$

$$\text{ssi } (x)^2 - 2 = 0$$

$$\text{ssi } (x)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$$

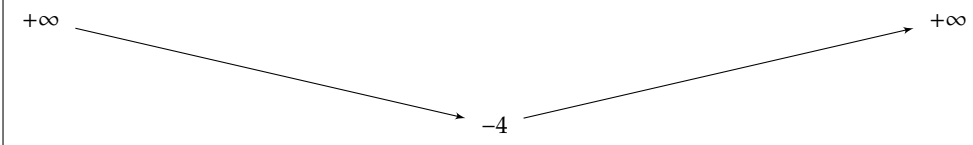
$$\text{ssi } (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{ssi } x - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{ssi } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

3. $f(x)$ est factorisable : $f(x) = 2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

4. Le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+
f	$+\infty$				$+\infty$

5. Solution de l'équation $f(x) = -4$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -4$ ssi $2x^2 - 4 = -4$

$$\text{ssi } 2x^2 = 0$$

$$\text{ssi } x(2x) = 0$$

$$\text{ssi } x = 0 \text{ ou } 2x = 0$$

$$\text{ssi } x = 0 \text{ ou } x = 0$$

6. Solution de l'équation $f(x) = -4$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -4$ ssi $2(x)^2 - 4 = -4$

$$\text{ssi } (x)^2 = 0$$

$$\text{ssi } x = 0$$

Exercice corrigé 4

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

1. Déterminer une forme canonique de f .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de votre choix.
3. f est-elle factorisable ? Si oui, déterminer en une forme factorisée.
4. Étudier le signe et les variations de f par la méthode de votre choix.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -1$.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -\frac{7}{3}$.

1. Après calcul, on détermine que $f(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$.

2. (a) En utilisant le discriminant :

on reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 28 > 0$, et donc cette équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2 avec : $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}$.

(b) En utilisant la forme canonique :

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = 0$ ssi $3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} = 0$

ssi $3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right] = 0$

ssi $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9} = 0$

ssi $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{9}}\right)^2 = 0$

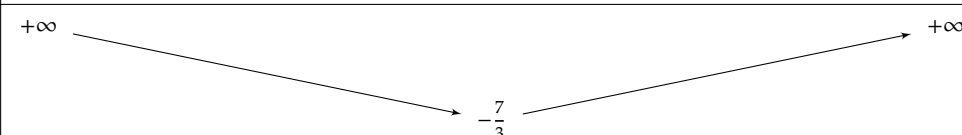
ssi $\left(x + \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{7}{9}}\right)\left(x + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{7}{9}}\right) = 0$

ssi $x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} = 0$ ou $x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} = 0$

ssi $x = \frac{1}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}$

3. $f(x)$ est factorisable : $f(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\right)$.

4. Le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}\sqrt{7}-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{7}-\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$					$+\infty$

5. Solution de l'équation $f(x) = -1$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -1$ ssi $3x^2 + 4x - 1 = -1$

ssi $3x^2 + 4x = 0$

ssi $x(3x + 4) = 0$

ssi $x = 0$ ou $3x + 4 = 0$

ssi $x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$

6. Solution de l'équation $f(x) = -\frac{7}{3}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = -\frac{7}{3}$ **ssi** $3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3}$

ssi $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$

ssi $x = -\frac{2}{3}$